Université de Tlemcen 20/05/2018
Département de Mathématiques
2ème Année Licence Mathématiques

Epreuve Finale d' Analyse IV (durée 02h)

Exercice 1 : (07 points)

Soit l'application $\varphi: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \to \varphi(x,y) = (u,v) = \left(\frac{x}{y}, x^2+y^2\right)$.

1) Vérifier que l'application φ n'est ni surjective ni injective de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* vers\ \mathbb{R}^2$.
2) Montrer que φ est un C^1 −difféomorphisme local dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_*$.φ est elle un homéomorphisme de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_* vers\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}_*{}^+$?
3) Soit $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 < x < \frac{\pi}{2}y \ \ et\ \ x^2+y^2 \le \cos\left(\frac{x}{y}\right)\right\}$, montrer que φ est un C^1 −difféomorphisme global de D vers $\varphi(D)$ et déterminer le Jacobien de φ^{-1}. Représenter dans le plan(u,v), le domaine $\varphi(D)$.
4) a) Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cosu)^{\frac{7}{2}} du$, écrire la valeur de I en fonction de $\gamma = \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$, on donne :

   $\beta(p,q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du \quad et \quad \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{sin\alpha\pi}\ \alpha \notin \mathbb{Z} \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

   b) En utilisant le changement de variables φ, calculer $\iint_D \frac{(x^2+y^2)^{7/2}}{y^2}\, dxdy$

Exercice 1 : 05 ,5 points

Soit f une fonction de classe $C^1\ sur\ \mathbb{R}$, on considère le système (S) d'équations :

$$(S)\begin{cases} f(xy) + (yz)^2 - z + 2t + 1 = 0 \\ f(xz) + (xy)^2 + z - t \ = 0 \\ f(xt) + \ \ yt + z^2 \ = \ 0 \end{cases}$$

1. Sous quelles conditions suffisantes peut-on résoudre x, y, z en fonction de t dans un voisinage du point $(t_0, x_0, y_0, z_0) = (0,0,1,1)$. On pose $\Phi(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$
2. Supposant les conditions précédentes vérifiées, on donne : $f(0) = f'(0) = -1$; calculer $x'(0), y'(0)\ et\ z'(0)$.
3. Soit g : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que g$(X) = \|X\|_2{}^2$,montrer que l'application $go\Phi$ est de classe C^1 dans un voisinage de zéro et écrire son développement limité d'odre 1 au voisinage de t=0.

Exercice2: 07.5 points

1. $I_1 = \iint_{S_1{}^+} xdydz + ydxdz + zdxdy = \iint_{S_1} \ xcos\alpha dydz + ydxdz + zdxdy =$ et

   $I_2 = \iint_{S_2{}^+} xdydz + ydxdz + zdxdy$

où $S_1{}^+$ est la face extérieure de la surface du cône d'équation $S_1 \ : z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 1$ et $S_2{}^+$ est la face extérieure de la surface de la de partie de la sphère $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 2$ avec $1 \le z \le \sqrt{2}$. (On vérifiera que $I_1 = 0\ et\ I_2 = 4\pi\big(\sqrt{2}-1\big)$)

2. Soit V le domaine compris entre les deux surfaces $S_1\ et\ S_2$ (V est limité supérieurement par la sphère et inférieurement par le cône)

   On considère la surface fermée $S = S_1 \cup S_2$, calculer$\oiint_{S^+} xdydz + ydxdz + zdxdy$ et retrouver le résultat en appliquant la formule d'Ostrogradski-Gauss.
3. Calculer l'intégrale curviligne $\oint_C (z^2x + zy)(dy - dx) + (x+y)dz$ où C est la cercle formé par l'intersection de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ et le cône $z = \sqrt{x^2+y^2}$, le sens du parcours est le sens inverse des aiguilles d'une montre. Retrouver le résultat en appliquant la formule de Stokes .

On donne : Formule de Stokes : $\oint_{c^+} \vec{F}.\overrightarrow{dr} = \iint_{S^+} Rot\vec{F}.\vec{n}\, ds$

Formule d' Ostrogradski-Gauss : $\oiint_S \vec{F}.\vec{n}dS = \iiint_V div\vec{F}\ dxdydz$

Corrigé

Exercice 1 : (07 points)

$\varphi\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \to \varphi(x,y) = (u,v) = \left(\frac{x}{y}, x^2+y^2\right).$

1) **(0.5pts)** $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\ \ \varphi(x,y) = (u,v)\ v > 0$

- φ n'est pas surjective de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\, vers\ \mathbb{R}^2$; en effet, pour $(u,v)\ tel\ que\ v < 0$, $(u,v) \neq \varphi(x,y)\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$; $\quad \varphi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*) \neq \mathbb{R}^2$
- φ n'est pas injective dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$car $\varphi(x,y) = \varphi(-x,-y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$

2) **(1.75pts)**

- $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, φ est de classe C^1puisque ses deux composantes sont de classe C^1

  Sa matrice jacobienne est $J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$ $\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ $\det J_\varphi = 2 + 2\frac{x^2}{y^2} \neq 0$

  Alors $\varphi'(x,y)$ est inversible $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$,ainsi φ est un C^1 –difféomorphisme local dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_*$
- φ n'est pas un homéomorphisme de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_*\, vers\ \mathbb{R}\times{\mathbb{R}_*}^+$ car elle n'est pas injective.

3) **(1.5pts)** $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \frac{\pi}{2}y\ \ et\ \ x^2+y^2 \le \cos\left(\frac{x}{y}\right)\right\}$,

Pour démontrer que φ est un C^1 –difféomorphisme **global** de D vers $\varphi(D)$,il suffit de montrer qu'elle est injective de D vers $\varphi(D)$ car φ est déjà un C^1 –difféomorphisme **local** dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_*$.

$\forall\,(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in D:\quad si\ \varphi(x_1,y_1) = \varphi(x_2,y_2)$,

$$\begin{cases} \varphi(x_1,y_1) = \varphi(x_2,y_2) \\ (x,y) \in D \Rightarrow x > 0\ et\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} \Rightarrow x_1 = y_1\dfrac{x_2}{y_2} \\ {x_1}^2 + {y_1}^2 = {y_1}^2\left(\dfrac{{x_2}^2+{y_2}^2}{{y_2}^2}\right) = {x_2}^2 + {y_2}^2 \end{cases}$$

Ainsi ${y_1}^2 = {y_2}^2 \Rightarrow y_1 = y_2$,il s'en suit $x_1 = x_2$ alors φ est injective.

Le Jacobien de φ^{-1} : $\det J_{\varphi^{-1}} = \frac{1}{\det J_\varphi} = \frac{y^2}{2(,x^2+y^2)}$

4) **(3.25pts)** a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cosu)^{\frac{7}{2}} du$ on pose $v = sin^2 u$, $dv = 2v^{\frac{1}{2}}(1-v)^{\frac{1}{2}}du$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 v^{\frac{-1}{2}}(1-v)^{\frac{5}{4}}\ du\ = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{9}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)} = \frac{\frac{5}{4}\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\sqrt{\pi}}{2\,\frac{7}{4}\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \sqrt{\pi}\frac{5\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{42\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)}$$

$$I = \frac{5\sqrt{2}}{42\sqrt{\pi}}\,\gamma^2$$

b) $(x,y) = \varphi^{-1}(u,v)$, $dxdy = \frac{y^2}{2(x^2+y^2)}dudy$, $\ (u,v) \in \varphi(D)$: $\begin{cases} 0 < u < \frac{\pi}{2} \\ 0 < v \le cosu \end{cases}$

$$\iint_D \frac{(x^2+y^2)^{7/2}}{y^2}\,dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{cosu} v^{5/2}\,dvdu = \frac{1}{2}\,\frac{2}{7}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cosu)^{\frac{7}{2}}du = \frac{1}{7}\ I$$

Exercice 1 : 05 ,5 points

La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 ,le système (S) s'écrit :$F(t,x,y,z) = (0,0,0)$ où :
$F = (f_1,f_2,f_3)$ tel que

$$\begin{cases} f_1(t,x,y,z) = f(xy) + (yz)^2 - z + 2t + 1 \\ f_2(t,x,y,z) = f(xz) + (xy)^2 + z - t \\ f_3(t,x,y,z) = f(xt) + \ \ yt + z^2 \end{cases}$$

1. **(2.75pts)** Pour résoudre x,y,z en fonction de t dans un voisinage du point $(t_0,x_0,y_0,z_0) = (0,0,1,1)$,il suffit d'appliquer le théorème de fonction implicite à la fonction vectorielle F

i. F est de classe C^1 puisque ses trois composantes sont de classes C^1 dans $\mathbb{R}^3$.

ii. $F(0,0,1,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} f_1(0,0,1,1) = f(0) + 1 = 0 \\ f_2(0,0,1,1) = f(0) + 1 = 0 \\ f_3(0,0,1,1) = f(0) + 1 = 0 \end{cases} \qquad 1^{\text{ère}}\text{condition : } f(0) = -1$$

iii. Si $Y = (x, y, z)$et $X = t$ $J_Y F(t, x, y, z) =$

$$\begin{pmatrix} yf'(xy) & xf'(xy) + 2z^2y & -1 + 2y^2z \\ zf'(xz) & 2x^2y & 1 + xf'(xz) \\ tf'(xt) & t & 2z + xf'(xt) \end{pmatrix}$$

$$J_Y F(0,0,1,1) = \begin{pmatrix} f'(0) & 2 & 1 \\ f'(0) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{det}(,J_Y F(0,0,1,1)) = -4f'(0)$$

$2^{\text{ème}}$condition : det(,$J_Y F(0,0,1,1)) \neq 0 \Leftrightarrow f'(0) \neq 0$

Conclusion :si $f(0) = -1$ $et f'(0) \neq 0$ alors $\exists V = \mathcal{V}(0), W = \mathcal{V}\big((0,1,1)\big) et\ \Phi: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ unique et de classe C^1telle que $\forall t \in V, F\big(t, \Phi(t)\big) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $\Phi(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$.

2. **(1.5pts)** Si $f(0) = f'(0) = -1$ $alors\ le\ TFI\ est\ applicable;$
$\Phi'(t) = J\Phi(t) = -J_Y{}^{-1}F(0,0,1,1).J_X F(0,0,1,1).$

$$J_Y F(0,0,1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, J_Y{}^{-1}F(0,0,1,1) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J_X F(t, x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ y \end{pmatrix}, J_X F(0,0,1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi'(0) = \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. **(1.25pts)** g : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{g}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)$ est de classe C^1.(fonction polynômiale)
$\nabla \mathrm{g}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \quad \nabla \mathrm{g}(0,1,1) = (0,2,2)$
$V \subset \mathbb{R} \overset{\Phi}{\to} W \subset \mathbb{R}^3 \overset{g}{\to} \mathbb{R}: \ \ go\Phi(t) = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) \ \ go\Phi(0) = 2$
$go\Phi$ est de classe C^1 dans un voisinage de zéro comme composée de deux fonctions de classe C^1 et $(go\Phi)'(0) = \nabla \mathrm{g}(0,1,1).\Phi'(0) = (0,2,2)\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$=4
Le développement limité à l'ordre 1 de $go\Phi$ au voisinage de zéro s'écrit :
$go\Phi(t) = 2 + 4\mathrm{t} + t\varepsilon(t) \ \ avec\ \varepsilon(t) \to 0\ qd\ t \to 0$

__Exercice2:__ 07.5 points

1. **(03.25pts)**

- $I_1 = \iint_{S_1^+} xdydz + ydxdz + zdxdy = \iint_{S_1} (x.cos\alpha + y.cos\beta + z.cos\gamma)ds$

Avec $\vec{n} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$ normale à la surface S_1 : $z = \varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$
Ou S_1: $\Phi(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$=0 , ainsi :$\vec{n} = \frac{\nabla\Phi}{\|\nabla\Phi\|}$, $\nabla\Phi = \left(\frac{-x}{z}, \frac{-y}{z}, 1\right)$
$proj_{XOY}S_1 = D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$, $I_1 = \iint_{S_1} (-\frac{x^2+y^2}{z} + z)ds = 0$

- $I_2 = \iint_{S_2^+} xdydz + ydxdz + zdxdy \ \ S_2: \Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$

Ou $z = \varphi(x, y) = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ $1 \leq z \leq \sqrt{2}$
$\vec{n} = \frac{\nabla\Phi}{\|\nabla\Phi\|}$, $\nabla\Phi = (2x, 2y, 2z)$, $\vec{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{\sqrt{2}}\right)$
$proj_{XOY}S_2 = D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ $I_2 = \iint_{S_2} (\frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{2}})ds = \sqrt{2}\iint_{S_2} ds$

ds=$\sqrt{1+{\varphi'_x}^2+{\varphi'_y}^2}$dxdy=$\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\,dxdy=\frac{\sqrt{2}}{z}dxdy$

$I_2=\iint_D \left(\frac{2}{\sqrt{2-r^2}}\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{2r}{\sqrt{2-r^2}}dr=2\pi\int_1^2\frac{du}{\sqrt{u}}=4\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$

2. **(02 pts)**Comme la surface fermée $S=S_1\cup S_2$, $I_3=\oiint_{S^+}xdydz+ydxdz+zdxdy$.

   $I_3=\iint_{S_1^+}xdydz+ydxdz+zdxdy+\iint_{S_2^+}xdydz+ydxdz+zdxdy$.

   $I_3=I_1+I_2$.

   $I_3=4\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$.

   <u>En appliquant la formule d'Ostrogradski-Gauss</u> : avec $\vec{F}=(x,y,z)$, $div\vec{F}=3$

   $$I_3=\oiint_S\vec{F}.\vec{n}\,dS=\iiint_V div\vec{F}\;dxdydz=\int_{-1}^1dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}dz.$$

   En coordonnées sphériques, $I_3=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}sin\varphi d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^2\,dr=4\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$.

3. **(02.25pts)** $I_4=\oint_C(z^2x+zy)(dy-dx)+(x+y)dz$ où C est la cercle formé par l'intersection de la sphère $x^2+y^2+z^2=2$ et le cône $z=\sqrt{x^2+y^2}$,

   L'équation du cercle C: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2\\ x^2+y^2=z^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2z^2=2\\ x^2+y^2=z^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=1\\ x^2+y^2=1\end{cases}$

   L'équation paramétrique du cercle C est$\begin{cases}x=cos\theta & dx=-sin\theta d\theta\\ y=sin\theta & dy=cos\theta d\theta\\ z=1\;\; dz=0\;\;\theta:0\to2\pi & dz=0\end{cases}$

   $$I_4=\int_0^{2\pi}(cos\theta+sin\theta)^2\,d\theta=\int_0^{2\pi}1+sin2\theta\;d\theta=2\pi$$

   <u>En appliquant la formule de Stokes</u> : avec $\vec{F}=\left(-(z^2x+zy),(z^2x+zy),(x+y)\right)$,.

   $$Rot\vec{F}=\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=(1-2zx-y,-2zx-y-1\,,\,z^2+z)$$

   La surface S (disque)entourée par le cercle C a pour équation : $z=1=\varphi(x,y)$ et de projection D sur le plan XOY ,le vecteur normal à S est $\vec{n}=(0,0,1)$ et $ds=dxdy$

   $$I_4=\oint_{c^+}\vec{F}.\vec{dr}=\iint_{S^+}Rot\vec{F}.\vec{n}\,ds=\iint_{S^+}z^2+z\,ds=2\iint_{S^+}ds=2\int_0^{2\pi}\int_0^1 rdr=2\pi$$