Faculté des Sciences
Département de Mathématiques 2017/2018

Corrigé du contrôle continu d'analyse numérique 2

Exercice 1

On considère le système linéaire $Ax = b$ avec $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A admet-elle une factorisation LU? Une factorisation de Cholesky?
2. Factoriser la matrice A, puis utiliser cette factorisation pour résoudre le système linéaire.

Solution

1. Les mineurs principaux de A sont $\delta_1 = 4, \delta_2 = 16$ et $\delta_3 = 64$.
Tous les mineurs principaux de A sont non nuls donc A admet une décomposition LU.
De plus A est symétrique et tous ses mineurs principaux sont strictement positifs donc A admet une décomposition de Cholesky.
2. L'étudiant peut utiliser la décomposition qu'il souhaite.
La décomposition de Cholesky

$b_{11} = \sqrt{a_{11}} = 2$

$b_{21} = \dfrac{a_{21}}{b_{11}} = 1$

$b_{31} = \dfrac{a_{31}}{b_{11}} = 0$

$b_{22} = \sqrt{a_{22-} b_{21}^2} = 2$

$b_{32} = \dfrac{a_{32-b_{21}b_{31}}}{b_{22}} = 1$

$b_{33} = \sqrt{a_{33-} b_{31}^2 - b_{32}^2} = 2$

Donc $A = BB^t$ avec $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$Ax = b \Leftrightarrow BB^t x = b \Leftrightarrow \begin{cases} By = b \\ B^t x = y \end{cases}$

$By = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

$B^t x = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

La décomposition LU

On pose $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$A^{(2)} = M^{(1)} A^{(1)}$ avec $M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

alors $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$A^{(3)} = M^{(2)}A^{(2)}$ avec $M^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$

d'où $A^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = U$

finalement $A = LU$ avec $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

$Ly = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$

$Ux = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$ avec $0 < \varepsilon < 1$.

1. Quel est le conditionnement de la matrice A par rapport à la norme infinie.
2. On prend $\varepsilon = 0.01$.
   Si x est la solution de $Ax = b$ et $x + \delta x$ est la solution de $A(x + \delta x) = b + \delta b$.
   Donner une borne de l'erreur relative $\dfrac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ sachant que $\dfrac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \leq 10^{-8}$. Justifier.

Solution

1. $cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$ avec $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

   Or $A^{-1} = \dfrac{1}{\varepsilon^2} \begin{pmatrix} 1 & -(1+\varepsilon) \\ -(1-\varepsilon) & 1 \end{pmatrix}$ donc $\|A\|_\infty = 2 + \varepsilon$ et $\|A^{-1}\|_\infty = \dfrac{2+\varepsilon}{\varepsilon^2}$.

Il s'en suit que $cond_\infty(A) = \dfrac{(2+\varepsilon)^2}{\varepsilon^2}$.

2. On suppose que A est une matrice inversible et que $\|A\|$ est une norme matricielle compatible avec le norme vectorielle $\|x\|$.

Nous avons premièrement:

$$Ax = b \Rightarrow \|b\| \leq \|A\| \|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \|A\| \frac{1}{\|b\|} \tag{2}$$

ensuite

$$A(x + \delta x) = b + \delta b \Rightarrow \delta x = A^{-1}\delta b \Rightarrow \|\delta x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|\delta b\| \tag{3}$$

Des inégalités 2 et 3, on déduit

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq cond(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \tag{4}$$

Appliquons l'inégalite 4 à la matrice donnée en 1. avec la norme $\|\cdot\|_\infty$, nous obtenons la majoration suivante:

$$\begin{aligned}\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} &\leq \frac{(2+\varepsilon)^2}{\varepsilon^2}10^{-8}\\ &\leq \left(1+\frac{4}{\varepsilon}+\frac{4}{\varepsilon^2}\right)10^{-8}\end{aligned}$$

pour $\varepsilon = 0.01$

$$\begin{aligned}\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} &\leq \left(1+4\times 10^2+4\times 10^4\right)10^{-8}\\ &\leq 4.0401\times 10^{-4}\end{aligned}$$

Remarquons que $cond_\infty(A) = 40401 >> 1$, la matrice donnée est mal conditionnée.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 & \alpha \\ 0 & b & 0 \\ \alpha & 0 & c \end{pmatrix}$. On suppose que A est symétrique définie positive.

1. Etudier la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.
2. Pour quelles valeurs des paramètres la méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle plus vite que celle de Jacobi?

Solution

1. Remarquons d'abord que par hypothèse A est symétrique défine positive, ce qui impose les conditions: a, b, c positives et $ac > \alpha^2$.
La matrice d'itération de la méthode de Jacobi s'écrit:

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\alpha}{a} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\alpha}{a} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, eigenvalues: $\alpha\sqrt{\frac{1}{ac}}, -\alpha\sqrt{\frac{1}{ac}}, 0$

dont le rayon spectral est $\rho(B_J) = \dfrac{|\alpha|}{\sqrt{ac}}$.

Comme $ac > \alpha^2$ alors $\rho(B_J) < 1$ et la méthode de Jacobi converge pour n'importe quel choix initial $x^{(0)}$.

La méthode de Gauss-Seidel est convergente car la matrice A est symétrique définie positive.

2. Afin de comparer les vitesses de convergence nous allons calculer le rayon spectral de la matrice d'itération de la méthode de Gauss-Seidel

$$B_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{a}\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{ac}\alpha^2 \end{pmatrix}$$

Son rayon spectral est $\rho(B_{GS}) = \dfrac{\alpha^2}{ac} = \rho^2(B_J)$
Si $\alpha = 0$ alors $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J) = 0$ les méthodes de Gauss-Seidel et de Jacobi engendre la même suite de vecteurs, ils ont la même vitesse.
Si $\alpha \neq 0$ alors étant donné que $\rho(B_J) < 1$ nous avons $\rho(B_{GS}) < \rho(B_J)$.
En conclusion, la méthode de Gauss-Seidel converge plus vite que celle de Jacobi si $\alpha \neq 0$.

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$ une matrice **symétrique définie positive**.

On note D la partie diagonale de $A, -E$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-F$ la partie trangulaire supérieure stricte. $A = D - E - F$

1. Soit $0 < \omega < 2$. Montrer que $\dfrac{1}{\omega}(D-E)$ est inversible.
2. On considère la méthode itérative pour trouver la solution de $Ax = b$, suivante:

$$\left(\frac{1}{\omega}(D-E)\right) x^{(k+1)} = \left(F + \frac{1-\omega}{\omega}(D-E)\right) x^{(k)} + b \tag{1}$$

   a. Ecrire (1) sous la forme $x^{(k+1)} = B_\omega x^{(k)} + c$
   b. Calculer en fonction de ω, les valeurs propres $\lambda_i, i = 1, 2$ de B_ω.
   c. Montrer que $\lambda_i \in \left]-1, 1\right[, i = 1, 2$. Conclure.

Solution

1. Comme $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, E = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$ et $F = -\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

alors $(D-E) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$

et $\det(D-E) = \alpha\beta$, reste à vérifier que ce déterminant est non nul.
A est définie positive si et seulement si $\alpha > 0$ et $\alpha\beta - \gamma^2 > 0$ c'est à dire $\alpha\beta > \gamma^2 > 0$ et donc $\beta > 0$.
ce qui implique $\det((D-E)) > 0$ donc $(D-E)$ est inversible et

$$\left(\frac{1}{\omega}(D-E)\right)^{-1} = \omega(D-E)^{-1} = \omega \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ -\frac{1}{\alpha\beta}\gamma & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}$$

2.

   a.

$$\left(\frac{1}{\omega}(D-E)\right) x^{(k+1)} = \left(F + \frac{1-\omega}{\omega}(D-E)\right) x^{(k)} + b$$

$\Leftrightarrow$

$$x^{(k+1)} = \left(\frac{1}{\omega}(D-E)\right)^{-1}\left(F + \frac{1-\omega}{\omega}(D-E)\right) x^{(k)} + \left(\frac{1}{\omega}(D-E)\right)^{-1} b$$

$\Leftrightarrow$

$$x^{(k+1)} = B_\omega x^{(k)} + c$$

avec $B_\omega = \omega(D-E)^{-1} F + (1-\omega) I$ et $c = \omega(D-E)^{-1} b$

   b.

$$
\begin{aligned}
B_\omega &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha}\omega & 0 \\ -\frac{1}{\alpha\beta}\gamma\omega & \frac{1}{\beta}\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (1-\omega) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-\omega & -\frac{1}{\alpha}\gamma\omega \\ 0 & \frac{1}{\alpha\beta}\gamma^2\omega - \omega + 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Les valeurs propres de B_ω sont ses éléments diagonaux car elle est triangulaire supérieure.
$\lambda_1 = 1-\omega$ et $\lambda_2 = \dfrac{\gamma^2}{\alpha\beta}\omega - \omega + 1$.
Montrons que $\lambda_i \in \left]-1,1\right[, i = 1,2$.
Sachant que $0 < \omega < 2$ alors $-1 < 1-\omega < 1$ et $\lambda_1 \in \left]-1,1\right[$.
Reste à vérifier que $\lambda_2 \in \left]-1,1\right[$, remarquons que si $\gamma = 0, \lambda_2 = \lambda_1 \in \left]-1,1\right[$.
Maintenant si $\gamma \neq 0$, $\lambda_2 = \left(\dfrac{\gamma^2}{\alpha\beta} - 1\right)\omega + 1$, comme $\alpha\beta > \gamma^2$ alors $\dfrac{\gamma^2}{\alpha\beta} < 1$ d'où $\dfrac{\gamma^2}{\alpha\beta} - 1 < 0$.
alors $-2 < \left(\dfrac{\gamma^2}{\alpha\beta} - 1\right)\omega < 0$ et $-1 < \left(\dfrac{\gamma^2}{\alpha\beta} - 1\right)\omega + 1 < 1$ ce qui implique $\lambda_2 \in \left]-1,1\right[$

En conclusion $\lambda_i \in \left]-1,1\right[, i = 1,2 \Rightarrow \rho(B_\omega) < 1$ et donc la méthode itérative proposée est convergente.