Faculté des Sciences
Dept. Mathématiques
Tlemcen

Contrôle de Géométrie

Exercice1 (6 pts)

Calculer le vecteur tangent unitaire, le vecteur normal principal unitaire et la courbure de la courbe suiante:

$$\gamma(t) = (t, cht).$$

Exercice2 (8 points)

Calculer les quantités (T, κ, N et B) pour la courbe:
$\gamma(t) = \left(\sqrt{1+t^2}, t, \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right).$

Exercice3 (6 points)

Soit γ une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne de courbure κ et de torsion $\tau \neq 0$.

On suppose que $\gamma(s)$ appartient à une sphère centrée à l'orogine et de rayon R. (i.e. $\|\gamma(s)\| = R$).

Montrer que

$$\frac{\tau}{\kappa} + \left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)' = 0.$$

On rappelle que

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = -\kappa T - \tau B \\ B' = \tau N \end{cases}.$$

Indication:Ecrire que $\gamma = \lambda T + \mu N + \nu B$ où λ, μ, ν sont des fonctions de s puis dériver.

1 Corrections

Exercice1

Nous avons

$$\gamma'(t) = (1, sht)$$

et

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + sh^2 t} = \sqrt{ch^2 t} = cht \neq 1.$$

On reparamétrise par l'abscisse curviligne.

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| \, du = sht$$

et

$$t = Argshs.$$

On pose alors

$$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma o s^{-1}(s) = \left(1 + Argshs, \sqrt{1+s^2}\right)$$

Vecteur tangent unitaire

$$T'(s) = \widetilde{\gamma}'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right)$$

ou encore

$$T(t) = \left(\frac{1}{cht}, tht\right).$$

Courbure

$$k(s) = \left\|\widetilde{\gamma}''(s)\right\| = \|T'(s)\| = \left(-\frac{s}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

d'où

$$k(s) = \frac{1}{1+s^2}$$

ou encore

$$k(t) = \frac{1}{ch^2 t}.$$

Vecteur normal principal

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}(-s, 1)$$

où bien

$$N(t) = \left(-tht, \frac{1}{cht}\right).$$

Exercice2

Nous avons

$$\gamma' t) = \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, 1, \frac{1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{t + \sqrt{1+t^2}} \right) = \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right).$$

Ce qui donne

$$\|\gamma' t)\| = \sqrt{2} \neq 1$$

et alors

$$s(t) = \sqrt{2} t$$

et on pose

$$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma o s^{-1}(s) = \left(\sqrt{1 + \frac{s^2}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{2}} \right) \right).$$

Vecteur tangent unitaire

$$T(s) = \widetilde{\gamma}'(s) = \left(\frac{s}{2\sqrt{1+\frac{s^2}{2}}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{s^2}{2}}} \right)$$

ou bien

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right).$$

Courbure

$$T'(s) = \left(\frac{1}{2\left(1+\frac{s^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}, 0, \frac{-s}{2\sqrt{2}\left(1+\frac{s^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$k(s) = \|T'(s)\| = \frac{1}{2\left(1+\frac{s^2}{2}\right)}$$

ou encore

$$k(t) = \frac{1}{2\left(1+t^2\right)}.$$

Vecteur normal principal

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s^2}{2}}} \left(1, 0, -\frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

ou encore
$$N(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\left(1,0,-t\right).$$
Vecteur binormal principal

$$B(t)=T(t)\wedge N(t)=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+t^2}}\begin{vmatrix}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\\ 1 & 0 & -t\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},1,-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right).$$

Exercice3

Exprimons le vecteur $\gamma(s)$ dans la base $(T(t),N(t),B(t))$ i.e.
$$\gamma(s)=\lambda T(s)+\mu N(s)+\nu B(s).$$
On remarque que puisque
$$\|\gamma\left(s\right)\|=R$$
on a
$$\langle\gamma\left(s\right),\gamma'(s)\rangle=\langle\gamma\left(s\right),T(s)\rangle=\lambda=0$$
et alors
$$\gamma(s)=\mu N(s)+\nu B(s)$$
On dérive
$$\begin{aligned}T(s)&=\mu' N(s)+\mu N'(s)+\nu' B(s)+\nu B'(s)\\ &=\mu' N(s)+\mu\left(-\kappa T-\tau B\right)+\nu' B(s)+\nu\tau N\end{aligned}$$
ce qui donne
$$\left\{\begin{array}{l}1+\mu\kappa=0\\ \mu'+\nu\tau=0\\ \nu'-\mu\tau=0\end{array}\right.$$
d'où
$$\mu=-\frac{1}{\kappa}$$
et
$$\nu=\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'$$
Finalement
$$0=\nu'-\mu\tau=\left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'+\frac{\tau}{\kappa}.$$