Université de Tlemcen
Faculté des Sciences 12/04/2018
Département de Mathématiques
L2-Math / Analyse IV **(durée 2h)**

Contrôle continu

Exercice 1 :10 points

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = \begin{cases} xy\ ln(x^2+y^2) & si\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1) Montrer que f est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
2) Calculer $\nabla f(0,0)$, f est-elle de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$?
3) Etudier l'existence et la continuité des dérivées partielles secondes dans $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

4) Etudier l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ (0,0) et \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, que peut-on conclure ?

5) Calculer $\nabla f(1,0), \nabla f(0,1)$,f admet –elle des extrema relatifs aux points$(1,0)$, $(0,1) et\ \ (0,0)$?

6) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, déterminer le maximum global et le minimum global de f dans D.

7) Soit dans $\mathbb{R}^3$, la surface S d'équation $z = f(x,y)$

- Calculer la pente à la surface S au point P$\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4ln2\right)$ dans la direction Nord ; dire si l'on commence par monter ou descendre lorsque l'on se déplace depuis ce point dans cette direction. Préciser l'angle correspondant à cette pente.
  Dans quelle direction la pente est-elle maximale ? Calculer sa valeur.
- Ecrire l'équation du plan tangent à la surface au point P.

Exercice 02 : 05,5pts

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^3 telle que $df = (-2x+2)dx + (1+z-3y^2)dy + (-2z+y)dz$
1) Calculer la matrice Hessienne de f .
2) Déterminer les extrema relatifs de f .
3) Etudier l'existence d'extrémum lié de f avec la contrainte donnée par l'équation
$g(x,y,z) = z - 3y^2 + 1 = 0$, en déduire les extrema de f dans le domaine V tel que
V=$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - 3y^2 + 1 \leq 0\}$
4) Ecrire le développement limité de f au plus grand ordre possible au voisinage du point $(1,0,-1)$ sachant que $f(1,0,-1) = 4$

Exercice 03 : 04,5pts

1/ Soit la forme différentielle dans $\mathbb{R}^2$: $\omega = (1+x^2)dy + (2xy+\alpha)dx \quad$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Montrer que ω est une différentielle totale et déterminer la fonction v telle que

$\omega = dv$, en déduire les solutions de l'équation différentielle (E) : $(1+x^2)y' + 2xy + \alpha = 0$

2/ Soit $f: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(x,y) = \mathrm{h(u)}$ avec $u = \frac{y}{x}$.

- Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}$,$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$,$\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction de $\mathrm{h'(u)}$ et $\mathrm{h''(u)}$ puis trouver les fonctions

f telle que : $\Delta \boldsymbol{f} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\alpha}{x^2}$.

- Déterminer les solutions qu'on peut prolonger par continuité sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé

Exercice 1 :09

Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$.

1) **0.75pt** $f'_x(x,y) = y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)}$ et $f_y'(x,y) = x\ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)}$

f'_xet f_y'sont continues dans $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ $comme\ produits, rapports\ et\ composés\ de\ fonctions$ continues alors$f$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

2) **01pt** Existence et continuité des d.p (d'odre 1) au pt (0,0) :

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$

  $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x'(x,y) = \lim_{r\to 0} 2\sin\theta . r\ln r + 2r\sin\theta\cos^2\theta = 0 = f_x'(0,0)$,

alors f_x' est continue au point (0,0) .

De même , par rôles symétriques , f_y' est continue en (0,0).

On conclue que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

3) **01pt** Existence et continuité des d.p (d'odre 2)dans $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}(x^2+3y^2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}(y^2+3x^2)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \ln(x^2+y^2) + \frac{2(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}$

Toutes les d.p secondes sont définies et continues alors f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

4) **0.75pt** Existence et continuité des d.p (d'odre 2) au pt (0,0) :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,$f'_x(x,0) = 0.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'_x(x,0)-f'_x(0,0)}{x} = 0$(de même $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$)
- $f_x'(0,y) = \begin{cases} y\ln(y^2) & si\ y \neq 0 \\ 0 & si\ y = 0 \end{cases}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \ln(y^2) = -\infty$, alors$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ n'existe pas.

(de même $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ n'existe pas).On conclue que f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

5) **02pts** $\nabla f(1,0) = \nabla f(0,1) = \nabla f(0,0) = (0,0)$ alors les points$(1,0), (0,1)et\ (0,0)$ sont des points critiques pour f , on calcule $\Delta = s^2 - rt$ pour $(1,0)et(0,1)$.

- $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,0) = 2$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 0 \Rightarrow \Delta = 4 > 0$, $(1,0)$ est un point selle.
- $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,1) = 2$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 0 \Rightarrow \Delta = 4 > 0$, $(0,1)$ est un point selle.
- $Soit\ x \in v(0)\ tq\ \ln 2x^2 < 0\ alors\ f(x,x) < 0\ et\ f(x,-x) = -x^2\ln 2x^2 > 0$

  ainsi $f(x,y) - f(0,0)$change de signe, alors $(0,0)$est aussi un point selle.

  Ainsi f n'admet pas d'extrémum relatif aux points$(1,0), (0,1)et\ (0,0)$.

6) **02,25pts** $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$ est un compact dans $\mathbb{R}^2$,on étudie l'existence des extrema dans l'intérieur de D où $int(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 4\}$ et dans la frontière de D : $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\ ou\ x^2+y^2 = 4\}$

- $\forall (x,y) \in int(D)$ $(x^2+y^2) > 1$ alors $(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) + 2x^2 > 0$ et $(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) + 2y^2 > 0$

$f'_x(x,y) = y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)} = \frac{y}{(x^2+y^2)}[(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) + 2x^2] = 0 \Rightarrow y = 0$

$f'_y(x,y) = x\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2x}{(x^2+y^2)} = \frac{x}{(x^2+y^2)}[(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) + 2y^2] = 0 \Rightarrow x = 0$

Le seul point critique est$(0,0) \notin$ intD, alors f n'admet pas de points critiques donc pas d'extrémum dans intD.

- $\forall (x,y) \in \partial D$ $soit\ (x^2+y^2) = 1$ soit $(x^2+y^2) = 4$
  - $si\ (x^2+y^2) = 1\ f est\ constante : f(x,y) = 0$
  - $si\ (x^2+y^2) = 4$, $(x,y) = (2\cos\theta, y = 2\sin\theta) et$

  $f(x,y) = 8\cos\theta\sin\theta . \ln 2 =$ 4ln2.sin2θ $-\pi \leq \theta < \pi$ alors
    - $\max_{\partial D} f(x,y) = 4\ln 2$ et il est atteint pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ ie au point $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
    - $\min_{\partial D} f(x,y) = -4\ln 2$ et il est atteint pour $\theta = -\frac{\pi}{4}$ ie au point $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

Conclusion : $f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = 4ln2$ est un maximum global dans D et $f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -4ln2$ est un minmum global dans D.

7) **02,25pts**

- La direction Nord $\vec{v} = (0,1)$ $D_{\vec{v}}f(\sqrt{2},\sqrt{2}) =< \nabla f(\sqrt{2},\sqrt{2}), \vec{v} > =$
$< \sqrt{2}\,(ln4+1)(1,1)\ ;\ (0,1) > = \sqrt{2}\,(ln4+1)$

$D_{\vec{v}}f(\sqrt{2},\sqrt{2})$ =tan$\alpha = \sqrt{2}\,(ln4+1) > 0$ alors on commence par monter lorsque l'on se déplace depuis ce point dans cette direction. $\alpha = artan\left(\sqrt{2}\,(ln4+1)\right) \cong 73^0, 49$.

La pente est maximale dans la direction de $\nabla f(\sqrt{2},\sqrt{2})$=$\sqrt{2}\,(ln4+1)(1,1)$qui a la direction Nord-Est et sa valeur est égale à $\|\nabla f(\sqrt{2},\sqrt{2})\|$=2$(ln4+1)$.

- L'équation du plan tangent à la surface au point P$(\sqrt{2},\sqrt{2},4ln2)$s'écrit :
$z - 4ln2 = \sqrt{2}\,(ln4+1)(x-\sqrt{2}) + \sqrt{2}\,(ln4+1)(y-\sqrt{2})$.ou
$z = \sqrt{2}\,(ln4+1)(x+y) - 2ln4 - 4$.

<u>Exercice 2 :06</u> points

$f :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : df = (-2x+2)dx + (1+z-3y^2)dy + (-2z+y)dz$

1. **(0.75pt)**

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -2x+2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2+1+z \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -2z+y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 \ , \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y \ , \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = +1 \end{cases} .$$

la matrice Hessienne de f est $H_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6y & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

2. **(03 pts)**

Les points critiques de f sont solutions du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -2x+2 = 0 \ldots \Rightarrow x = 1. \ldots\ldots & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2+1+z = 0 \ \Rightarrow -12z^2+z+1 = 0 \ldots\ldots & (2) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -2z+y = 0 \ldots \quad \Rightarrow y = 2z \ldots\ldots\ \ldots & (3) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow z = -\frac{1}{4}$ ou $z = \frac{1}{3}$.

Ainsi on obtient deux points critiques : $\left(1,\frac{-1}{2},\frac{-1}{4}\right)$ *et* $\left(1,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

- $H_f\left(1,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$est définie négative ou bien sa forme quadratique :

$Q(X,Y,Z) = -(2X^2 + 4Y^2 + 2Z^2\text{- 2YZ}) =-\ (2X^2 + 3Y^2 + Z^2 + (Y-Z)^2)$ est définie négative.

Alors $f\left(1,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ est un maximum

$H_f\left(1,\frac{-1}{2},\frac{-1}{4}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$est indéfinie *ou* $Q(X,Y,Z) = -2X^2 + 3Y^2 - 2Z^2$+2YZ change de signe alors $f\left(1,\frac{-1}{2},\frac{-1}{4}\right)$ n'est pas un extrémum.

3. **1.25pts** Méthode de multiplicateur de Lagrange pour les extrema liés :
On a la fonction de Lagrange : $f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$
La condition nécessaire d'extrémum :

$$\begin{cases} -2x+2 = 0 \ldots \Rightarrow x = 1. \ldots\ldots & (1) \\ -3y^2+1+z-\lambda(6y) = 0 & (2) \\ -2z+y+\lambda = 0 \ldots & \ldots\ (3) \\ z - 3y^2 + 1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & .(4) \end{cases}$$

(2)&(4) $\Rightarrow 6\lambda y = 0 \Rightarrow \lambda = 0\ ou\ y = 0$.

- Si $y = 0$ alors $z = -1$ et $\lambda = 2z - y = -2$, on obtient le point critique (1,0,-1)
Pour le caractère d'extrémum on étudie le signe de d^2f.

$d^2f = -2dx^2 - 6ydy^2$+2 dz^2-2 $dydz$ avec la condition $dg = 0$.

$dg = dz - 6ydy = 0 \Rightarrow dz = -6ydy.$

$d^2f(1,0,-1) = -2dx^2 < 0$ alors $f(1,0,-1)$est maximum de f liée par la condition $z - 3y^2 + 1 = 0$

- Si $\lambda = 0$,on a le cas d'extrema libre déjà étudié dans 2) .

  - Les extrema de f dans le domaine V tel que V=$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - 3y^2 + 1 \leq 0\}$

On étudie l'existence des extrema dans l'intérieur de V où
$int(V) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - 3y^2 + 1 < 0\}$ et dans la frontière de V
$\partial V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - 3y^2 + 1 = 0\}$, .

- Les deux points critiques de f appartiennent tous les deux à ∂V,la fonction f n'admet pas d'extrémun dans $int(V)$.
- Les extrémuns de f dans ∂Vsont les extémuns liés de f avec la contrainte $z - 3y^2 + 1 = 0$l

  Ainsi, on a deux maxima relatifs de f dans V : $f(1,0,-1)$et $f\left(1,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

4. **0,5pt** Le développement limité de f au plus grand ordre possible au voisinage du point $(1,0,-1)$:

Toutes les dp d'ordre supérieures ou égales à 4 sont nulles alors le plus grand ordre possible est l'ordre 3 :

$$f(x,y,z) = 4 + 2(z+1) + \frac{1}{2}\left(-2(x-1)^2 - 2(z+1)^2 + 2y(z+1)\right) + y^3 +$$
$$\|(x-1,y,z+1)\|^3 \varepsilon\left((x-1,y,z+1)\right) \text{ avec } \lim_{\|(x-1,y,z+1)\| \to 0} \varepsilon\left((x-1,y,z+1)\right) = 0$$

Exercice2: (04, 5pt)

1) **02,25pts** $\omega = (1 + x^2)dy + (2xy + \alpha)dx = Pdx + Qdy$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$ alors ω est totale : $\omega = dv$

$\frac{\partial v}{\partial x} = P = 2xy + \alpha \Rightarrow v(x,y) = \int 2xy + \alpha \, dx = x^2y + \alpha x + C(y).$

$\frac{\partial v}{\partial y} = Q = 1 + x^2 = x^2 + C'(y) \Rightarrow C'(y) = 1 \Rightarrow C(y) = y + c \quad c \in \mathbb{R}$

2) **02,25** $f(x,y) = h(u)$ $avec$ $u = \frac{y}{x}$ alors $\frac{\partial u}{\partial x} = \left(-\frac{y}{x^2}\right)$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{1}{x}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}h'(u)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x}h'(u)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\frac{y}{x^3}\,h'(u) + \frac{y^2}{x^4}h''(u)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}h''(u)$

$\Delta \boldsymbol{f} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\frac{y}{x^3}\,h'(u) + \frac{y^2}{x^4}h''(u) + \frac{1}{x^2}h''(u) = \frac{1}{x^2}\left[2uh'(u) + (u^2+1)h''(u)\right]$

$(*)$ $\Delta \boldsymbol{f} = -\frac{\alpha}{x^2} \Leftrightarrow 2uh'(u) + (u^2+1)h''(u) + \alpha = 0.$ Ainsi h' vérifie l'équation différentielle (E)

Alors $h'(u) = \frac{c - \alpha u}{1 + u^2} \Rightarrow h(u) = C.arctanu - \frac{\alpha}{2}\ln(1+u^2)$ où $C \in \mathbb{R}$.

Les solutions de $(*)$ définies dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ s'écrivent :

$f(x,y) = C.arctan\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) - \frac{\alpha}{2}\ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$ où $C \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} f(x,y) = \begin{cases} C\frac{\pi}{2} & si \;\; \alpha = 0 \\ \infty & si \;\; \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Les solutions avec $\alpha = 0$ peuvent être prolonger par continuité sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} C.arctan\left(1 + \dfrac{y^2}{x^2}\right) & si \;\; x \neq 0 \\ C\dfrac{\pi}{2} & si \;\; x \neq 0 \end{cases}$$