Université de Tlemcen.
Département de mathématiques.

le 11/04/2018.

Partiel de "Algèbre 4"

durée = 2 heures.

Exercice n° 1

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,/\, P = 0 \text{ ou } d°P \leq 3\}$ et l'application f définie par.

$$f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}.$$
$$(P, Q) \longmapsto f(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,dx .$$

1°/ Montrer que f est un produit scalaire sur E

2°/ Orthonormaliser la base $\{1, X, X^2, X^3\}$ de E en utilisant le procédé de Shmidt.

Exercice n° 2

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien, $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E non nuls et orthogonaux 2 à 2. Montrer que la famille $\{x_1, \dots, x_n\}$ est libre.

Exercice n° 3

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien, F et G deux sous espaces vectoriels de E.

1°/ Montrer que $F \subset G \Longrightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}$

2°/ Montrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$

3°/ En déduire de (2°/) que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$

Exercice n° 4

Préciser la nature de l'endomorphisme qui dans la base canonique est représenté par :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 5

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien $f, g : E \longrightarrow E$ deux applications telles que :
$$< f(x), y > = < x, g(y) > \quad \forall x, y \in E.$$
Montrer que f est linéaire.

Exercice n° 6

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien, f un endomorphisme de E et $u = f^* \circ f$.

1°/ Montrer que u est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulle

2°/ Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} f$ puis que $\operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$

Barème : Ex 1 : 4 pts ; Ex 2 : 2,5 pts , Ex 3 : 3,5 pts ; Ex 4 : 3,5 pts ; Ex 5 : 2,5 pts ; Ex 6 : 4 pts.

Bon Courage

Corrigé du partiel du module "Algèbre 4"

du 11/04/2018

Exercice n° 1

1°/ La bilinéarité (l'intégrale et linéaire) et la symétrie sont évidents.

- $f(P,P) = \int_{-1}^{1} P^2(x) \geq 0$

- Comme $x \longrightarrow P(x)$ et continue sur $[-1,1]$ $f(P,P) = \int_{-1}^{1} P^2(x)\,dx = 0$ entraîne que la fonction polynôme $x \longrightarrow P(x)$ et nulle sur $[-1,1]$ donc $P = 0$.

2°/ Considérons la base $\{1, X, X^2, X^3\}$ de E, en utilisant le procédé de Shmidt on trouve aisément que la base orthogonale et $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ avec $\varepsilon_1 = 1$; $\varepsilon_2 = X$; $\varepsilon_3 = X^2 - \frac{1}{3}$; $\varepsilon_4 = X^3 - \frac{3}{5}X$.

et que la base orthonormée et $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ avec :

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ ; \ e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,X \ ; \ e_3 = \sqrt{\frac{5}{8}}\,(3X^2 - 1) \ ; \ e_4 = \sqrt{\frac{7}{8}}\,(5X^3 - 3X).$$

Exercice n° 2

$(E, \langle , \rangle)$ euclidien

Hyp : $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs non nuls de E orthogonaux 2 à 2.

Cl : $\{x_1, \dots, x_n\}$ et libre

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}$ $\langle \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n, x_i \rangle = \langle 0, x_i \rangle = 0$

$\xrightarrow{x_i \text{ orthog } 2 \text{ à } 2} \forall i \in \{1, \dots, n\}$ $\lambda_i \|x_i\|^2 = 0 \xrightarrow{x_i \neq 0} \forall i \in \{1, \dots, n\}$ $\lambda_i = 0$

$\Longrightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$ et libre c.q.f.d.

Exercice n° 3

1°/ $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$

Soit $x \in G^\perp$ et montrons que $x \in F^\perp$, pour cela prenons $a \in F$ et montrons que $\langle x, a \rangle = 0$?

Soit $a \in F \xrightarrow{F \subset G} a \in G \Rightarrow \langle x, a \rangle = 0$ car $x \in G^\perp$ ce qui montre que $x \in F^\perp$

2°/ $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.

Soit $x \in (F+G)^\perp$ et montrons que $x \in F^\perp$ et que $x \in G^\perp$, pour cela prenons $a \in F$ et $b \in G$ et montrons que $\langle x, a \rangle = 0$ et $\langle x, b \rangle = 0$

$a = a + 0$ avec $a \in F$ et $0 \in G \Rightarrow a \in F+G \Rightarrow \langle x, a \rangle = 0$ car $x \in (F+G)^\perp$

$b = 0 + b$ avec $0 \in F$ et $b \in G \Rightarrow b \in F+G \Rightarrow \langle x, b \rangle = 0$ car $x \in (F+G)^\perp$.

$\Rightarrow x \in F^\perp$ et $x \in G^\perp \Rightarrow x \in F^\perp \cap G^\perp \Rightarrow (F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$

$F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$

Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$ et montrons que $x \in (F+G)^\perp$, pour cela prenons $z \in F+G$ et montrons $\langle x, z \rangle = 0$?

$z \in F+G \Rightarrow z = a+b$ avec $a \in F$ et $b \in G$.

$\langle x, z \rangle = \langle x, a+b \rangle = \langle x, a \rangle + \langle x, b \rangle \underset{x \in F^\perp \text{ et } x \in G^\perp}{\overset{x \in F^\perp \cap G^\perp}{=}} 0+0 = 0$ car $a \in F$ et $b \in G$

$\Rightarrow \langle x, z \rangle = 0 \quad \forall z \in F+G \Rightarrow x \in (F+G)^\perp \Rightarrow F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$

$\Rightarrow (F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

3°/ D'après 2° si A et B sont 2 ssev de E on a $(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$ ①

Posons $A = F^\perp$ et $B = G^\perp$ d'après ① nous aurons $(F^\perp + G^\perp)^\perp = F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp}$.

$\Rightarrow (F^\perp + G^\perp)^\perp = F \cap G \Rightarrow (F^\perp + G^\perp)^{\perp\perp} = (F \cap G)^\perp$

$\Rightarrow (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ c.q.f.d.

Exercice n°4 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I$

$\Rightarrow A \in O(3, \mathbb{R})$; $\det A = 1 \Rightarrow A \in SO(3, \mathbb{R})$.

Th. $\Rightarrow$ A représente une rotation de centre 0 et d'angle θ autour de l'axe E_1

θ est donné par $T_r A = 2\cos\theta + 1 \xRightarrow{T_r A = 1} 1 = 2\cos\theta + 1 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

d'autre part. $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$\Rightarrow E_1 = [\vec{v}]$ avec $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$..

Exercice n°5

Soient $x, x' \in E$; $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, $y \in E$

$\langle f(\lambda x + \lambda' x'), y \rangle = \langle \lambda x + \lambda' x', g(y) \rangle = \lambda \langle x, g(y) \rangle + \lambda' \langle x', g(y) \rangle$.

$= \lambda \langle f(x), y \rangle + \lambda' \langle f(x'), y \rangle = \langle \lambda f(x) + \lambda' f(x'), y \rangle$.

$\Rightarrow \langle f(\lambda x + \lambda' x') - \lambda f(x) - \lambda' (f(x'), y \rangle = 0 \quad \forall y \in E$

en particulier pour $y = f(\lambda x + \lambda' x') - \lambda f(x) - \lambda' f(x')$.

nous aurons alors $\langle f(\lambda x + \lambda' x') - \lambda f(x) - \lambda' f(x'), f(\lambda x + \lambda' x') - \lambda f(x) - \lambda' f(x') \rangle = 0$

c'est à dire $\| f(\lambda x + \lambda' x') - \lambda f(x) - \lambda' f(x') \|^2 = 0$ et par conséquent.

$f(\lambda x + \lambda' x') = \lambda f(x) + \lambda' f(x')$ pour $x, x' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

ce qui montre que f est linéaire

Exercice n° 6

1/ $u = f^* \circ f \Rightarrow u^* = (f^* \circ f)^* = f^* \circ f^{**} = f^* \circ f = u$.

$\Rightarrow u^* = u \Rightarrow u$ est symétrique.

u est donc un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $\xrightarrow{\text{th. du cours}}$ u est diagonalisable.

D'autre part considérons λ une valeur propre de u, comme u est symétrique, d'après le même théorème λ est réelle.

λ valeur propre de $u \Rightarrow \exists v \in E\ (v \neq 0) / u(v) = \lambda v$.

$\Rightarrow \langle u(v), v \rangle = \langle f^*(f(v)), v \rangle = \langle v, f^*(f(v)) \rangle = \langle f(v), f(v) \rangle$

$\Rightarrow \langle u(v), v \rangle = \|f(v)\|^2 \geq 0$ ①

mais $\langle u(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle \overset{\lambda \in \mathbb{R}}{=} \lambda \langle v, v \rangle = \lambda \|v\|^2$. ②

① et ② $\Rightarrow \lambda \|v\|^2 = \|f(v)\|^2 \xrightarrow{v \neq 0} \lambda = \frac{\|f(v)\|^2}{\|v\|^2} \geq 0$ c.q.f.d.

2°/ * $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} u$?

$x \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f^*(f(x)) = 0 \Rightarrow (f^* \circ f)(x) = 0 \Rightarrow u(x) = 0$
$\Rightarrow x \in \operatorname{Ker} u$.

* $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} f$.

$x \in \operatorname{Ker} u \Rightarrow u(x) = 0 \Rightarrow \langle u(x), x \rangle = 0 \Rightarrow \langle x, f^*(f(x)) \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(x) \rangle = 0$
$\Rightarrow \|f(x)\|^2 = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} f \Rightarrow \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} f$.

* $\operatorname{Im} u \subset (\operatorname{Ker} f)^\perp$

$y \in \operatorname{Im} u \Rightarrow \exists x \in E / y = u(x)$, montrons que $y \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$, pour cela. prenons $a \in \operatorname{Ker} f$ et montrons que $\langle y, a \rangle = 0$?.

$\langle y, a \rangle = \langle u(x), a \rangle = \langle f^*(f(x)), a \rangle = \langle f(x), f(a) \rangle \underset{f(a)=0}{\overset{a \in \operatorname{Ker} f}{=}} \langle f(x), 0 \rangle = 0$
$\Rightarrow \operatorname{Im} u \subset (\operatorname{Ker} f)^\perp$

d'autre part $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u \overset{1/}{=} \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} u$.
$= \dim \operatorname{Ker} f + \dim (\operatorname{Ker} f)^\perp \Rightarrow \dim \operatorname{Im} u = \dim (\operatorname{Ker} f)^\perp$

Conclusion: $\left.\begin{array}{l} \operatorname{Im} u \text{ ssev de } (\operatorname{Ker} f)^\perp \\ \dim \operatorname{Im} u = \dim (\operatorname{Ker} f)^\perp \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} f)^\perp$ c.q.f.d