

Résolution numérique des équations non linéaires

Exercice 1

A l'aide de la méthode de bisection, trouver une valeur approchée à 10^{-5} près de la solution de $x^2 - 4x + 4 - \ln x = 0$, $1 \leq x \leq 2$.

Faire un programme python vitessebisect.py pour tracer $f(x_n)$ en fonction du nombre d'itération n de l'algorithme. Tracer ensuite $\log_{10}(|f(x_n)|)$ en fonction de n .

Exercice 2

Un modèle simple de biologie, le modèle S.I.R, permet de simuler l'évolution d'une population affectée par une épidémie. Afin de calibrer un dispositif de santé publique, on souhaite connaître au début de l'épidémie combien de personnes seront touchées et combien resteront saines. les équations du modèles conduisent à l'égalité:

$$S_\infty = S_0 \exp\left(-\frac{N - S_\infty}{\rho}\right) \quad (1)$$

où N est le nombre d'individus total, S_0 est le nombre d'individus initialement sains, ρ est le taux de guérison relatif (inférieur à S_0) et S_∞ est notre inconnue: le nombre d'individus restés sains en fin d'épidémie.

1- Montrer que l'équation (1) admet une seule solution entre 0 et N .

2- Résoudre par la méthode des points fixes l'équation pour $N = 51$, $S_0 = 50$ et différentes valeurs admissibles de ρ . Tracer le graphique de S_∞ en fonction du rapport $\frac{S_0}{\rho}$.

Exercice 3

1- Ecrire une fonction Python **newton(f,df,x0,eps,nmax)** calculant la solution de $f(x) = 0$ par la méthode de Newton.

2- Utiliser la méthode de Newton pour calculer le zéro de $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) - 2$, $x > 0$

Comparer à la valeur obtenue avec la fonction **newton** de **scipy.optimize**.

3- Modifier la fonction newton de sorte à pouvoir représenté graphiquement l'erreur $\log_{10}(|f(x_n)|)$ en fonction des itérations n .

Tracer l'erreur $\log_{10}(|f(x_n)|)$ en fonction de n sur la figure(3).

4- Utiliser la méthode de Newton pour calculer le zéro de $f(x) = (x - 1) * \ln(x)$ sur $[0,1]$. Tracer l'erreur $\log_{10}(|f(x_n)|)$ en fonction de n sur la même figure(3).

Comparer avec les courbes obtenues et expliquer pourquoi la convergence n'est pas quadratique dans le second cas.