Département de Mathématiques 2017/2018
Module: Analyse numérique 1
Fiche de T.P. N°2

Listes et arithmétique flottante

Commencer par l'exemple classique 0.1+0.2=0.30000000000000004.
Dans de nombreuses situations, la quantité d'erreur dans ces calculs est très faible et peut être négligée ou éliminée avec l'arrondissement, mais dans d'autres cas leurs effet peut être catastrophique.
Dans ce qui suit nous allons mettre en évidences deux cas pathologiques de problèmes en arithmétique flottante.

Problème 1
On considère la suite introduite par J. M. Muller définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = -4 \\ u_n = 111 - \dfrac{1130}{u_{n-1}} + \dfrac{3000}{u_{n-1}u_{n-2}} \end{cases}$$

On peut alors montrer que la limite de cette suite est égale à 6 et malgré cela, quelque soit le système et la précision utilisés, cette suite semblera tendre vers 100.
Ecrire un programme Python qui calcule cette suite pour $n \leq 100$.
Expliquer le résultat.
(indication: la solution générale de la récurrence s'écrit: $u_n = \dfrac{\alpha 100^{n+1} + \beta 6^{n+1} + \gamma 5^{n+1}}{\alpha 100^n + \beta 6^n + \gamma 5^n}$, α, β et γ dépendent des valeurs initiales. Dans notre cas, avec $u_0 = 2$ et $u_1 = -4$, $\alpha = 0, \beta = -3$ et $\gamma = 4$.)

Problème 2
Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$. On se place dans le cas où $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.
1. Dans le cas où $|4ac| << b^2$, quel problème peut-on rencontrer dans le calcul des deux racines distinctes x_1 et x_2?
2. Comment peut-on remédier à ce problème ?
3. Programmer les deux jeux de formules (les classiques et les nouvelles) et expérimenter avec les équations $10^{-k}x^2 - 0.8x + 10^{-k} = 0$ pour des valeurs de k de plus en plus grandes.

Problème 3 (Les listes)
On appelle « **suite de Syracuse** », d'un nombre entier $N > 0$ une suite définie de la manière suivante :

$$u_0 = N$$
$$u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair,} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La conjecture affirme que pour tout N, il existe un indice n tel que $u_n = 1$.
Les caractéristiques d'une telle suite sont :
- **le temps de vol** : c'est le rang du premier terme de la suite égal à 1,
- **le temps de vol en altitude** : c'est le plus petit indice $n > 0$ tel que $u_{n+1} \leq u_0$,
- **l'altitude maximale** : c'est la valeur maximale de la suite

1- Ecrire une fonction Python syracuse, qui calcule une suite de Syracuse.
En arguments d'entrée de la fonction, il y aura la valeur de départ u_0 et le nombre de termes de la suite à calculer.
Les valeurs affichées seront le temps de vol, le temps de vol en altitude et l'altitude maximale.
2- Utiliser la fonction syracuse pour $N = 127$ et $N = 15$.

La conjecture de Syracus
A priori, il serait possible que la suite de Syracuse de certaines valeurs de départ n'atteigne jamais la valeur 1, soit qu'elle aboutisse à un cycle différent du cycle trivial, soit qu'elle diverge vers l'infini. Or, on n'a jamais trouvé d'exemple de suite obtenue suivant les règles données qui n'aboutisse pas à 1 et, par suite, au cycle trivial.
La conjecture de **Syracuse**, encore appelée conjecture de **Collatz**, conjecture d'**Ulam**, conjecture **tchèque** ou **problème 3x+1** est l'hypothèse mathématique selon laquelle la suite de Syracuse de n'importe quel entier strictement positif atteint 1.
Ce qui est magique avec cette conjecture est sa simplicité apparente, et pourtant elle résiste depuis des siècles aux plus grands mathématiciens du monde !
Certains avancent même que le problème serait indécidable.
Le mathématicien hongrois Paul Erdős (1913-1996) célèbre pour ses conjectures (voir conjecture de Erdos-Straus) a dit à propos de la conjecture de Syracuse :
«les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes»

http://www.math93.com/index.php/112-actualites-mathematiques/611-la-suite-de-syracuse-ou-conjecture-de-syracuse-de-collatz-d-ulam-tcheque-ou-probleme-3x-1