Département de Mathématiques 2017/2018
Module: Analyse numérique 1
Fiche de T.D. N°3

Interpolation polynômiale

Exercice 1
Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange p de $f(x) = \cos(\pi x)$ associé aux points $0, \pi/4, \pi/6$. Calculer $p(\pi/5)$. Estimer l'erreur d'interpolation au point $\pi/5$ puis comparer avec l'erreur effective.
Exercice 2
Soit $I = [a, b]$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\{x_0, \ldots, x_n\} \in I$ et p_n le polynôme d'interpolation de f associé aux points $x_0, \ldots, x_n$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses?
1. Si p_n est un polynôme constant alors n est nécessairement égal à 0.
2. Si $n > 1$ et p_n est un polynôme constant alors f est nécessairement constante.
3. Si $n = 1$ et f est une fonction croissante (resp. décroissante) sur I alors p_n est croissante (resp. décroissante) sur I.
4. Même question lorsque $n = 2$.
Exercice 3
On considère une fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Soit p le polynôme de degré un qui interpole f sur les points d'appui x_0, x_1.
1. Etudier la fonction $x \mapsto (x-1)(x+1)$ pour $x \in [-1, 1]$.
2. Même question pour la fonction $x \mapsto (x - \frac{\sqrt{2}}{2})(x + \frac{\sqrt{2}}{2})$.
3. Pour réaliser une interpolation numérique d'une fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,quels points d'appui $\{x_0, x_1\}$ doit on choisir $\{x_0, x_1\} = \{-1, 1\}$ ou $\{x_0, x_1\} = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$? Pourquoi?
4. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 1 de $x \mapsto x^3$ qui interpole f sur $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ et donner une majoration de l'erreur pour tout $x \in [-1, 1]$.
Exercice 4
Soient $x_0, x_1, ..., x_n$ des points distincts d'un intervalle [a,b].
Démontrer que la différence divisée $f[x_0, x_1, ..., x_n]$ est une fonction symétrique pour toute permutation σ de 1,2,...,n
ie $f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}] = f[x_0, x_1, ..., x_n]$
indication: Montrer l'identité $f[x_0, x_1, ..., x_n] = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{0 \le k \le n; k \ne j} (x_j - x_k)^{-1}$
Exercice 5
Soit f une fonction dont on connaît la valeur en certains points x_0, x_1, x_2,et $x_3$comme indiqué à la table des différences divisées ci-dessous.

x_1	$f(x_i)$	$f[x_i,x_j]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+2}]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+3}]$
1.9	0.94630			
1.5	0.99749	-0.127975		
2.3	0.74571	-0.314725	α	
2.7	0.42738	-0.795824	β	γ

1. Calculer α, β et γ.
2. A l'aide de cette table, calculer une approximation de $f(1.8)$ en utilisant le polynôme d'interpolation aux nœuds x_0, x_1 et x_2.
3. Donner une estimation de l'erreur d'interpolation en $x = 1.8$.
4. Sachant que $f(x) = \sin(x)$, donner une majoration de la valeur absolue de l'erreur d'interpolation en $x = 1.8$.
5. Quel polynôme est le plus précis, celui trouvé en 2., ou le polynôme de Lagrange interpolant f aux nœuds x_1, x_2 et x_3? Justifier votre réponse.

Exercice 6

a) Montrer que le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à une fonction paire et une famille de points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ symétrique par rapport à l'origine est pair.
b) En déduire le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $f(x) = \cos x$ aux points $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$.

Exercice 7

Déterminer le pas régulier h d'une table de la fonction $f(x) = \sin(x)$ sur $[0, 1]$ de façon à ce que l'interpolation par un polynôme du second degré dans cette table ait une erreur inférieure à 10^{-5}.

Exercice 8

On considère la table suivante:

x	$f(x)$
2.8	16.4446
3.0	20.0855
3.2	24.5325
3.4	29.9641
3.6	36.5982
3.8	44.7012
4.0	54.5982

1) Calculer $f(3.3)$ par interpolation polynomiale à partir des données $3, 3.2, 3.4, 3.6$, en écrivant le polynôme sous la forme de Newton utilisant les différences progressives.
2) Donner une majoration de l'erreur théorique d'interpolation sachant que $f(x) = e^x$. Comparer à l'erreur réelle.
3) Combien de points aurait-il fallu prendre, en théorie, pour avoir une erreur inférieure à 5×10^{-5}?
(indication: vérifier que $\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| \leq h^{n+1}n!$ où $x_i = x_0 + ih$ et $x_0 \leq x \leq x_n$.)