Département de Mathématiques 2017/2018
Module: Analyse numérique 1
Fiche de T.D. N°2

Résolution des équations non linéaires

Exercice 1
(a) Le polynôme $p(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ possède 4 racines simples. Pour ce polynôme, déterminer vers quelle racine la méthode de la bissection convergera, s'il y a lieu, en partant de chacun des intervalles suivants:
i) $[-1.5, 3]$ ii) $[-3, 3]$.
(b) Combien d'itérations de la méthode de la bissection seront nécessaires pour obtenir cette racine avec une erreur absolue de 10^{-6} en partant de l'intervalle $[-1.5, 3]$.
Exercice 2
On considère l'équation

$$x^3 - 3x - 1 = 0 \tag{1}$$

L'équation (1) possède une solution et une seule dans l'intervalle [1,2]. On appelle α cette solution. On cherche à obtenir une valeur approchée de α en utilisant le théorème du point fixe. Pour cela on doit mettre l'équation sous la forme $x = g(x)$.
(a) Le choix $g(x) = (x^3 - 1)/3$ est-il judicieux?
Dans la partie suivante on pose $g(x) = (3x + 1)^{1/3}$
(b) Montrer que toute suite x_n définie par $x_0 \in [1, 2]$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ $(n \geq 0)$ converge vers α.
(c) Montrer que la suite x_n est croissante ou décroissante suivant que $g(x_0) > x_0$ ou $g(x_0) < x_0$. Les deux cas peuvent-ils se produire ?
(d) Donner une approximation de α avec deux chiffres significatifs. $(x_0 = 2)$
(e) Auriez-vous recommandé la méthode décrite dans cet exercice pour trouver une approximation de α? Justifiez précisément votre réponse.
Exercice 3
(a) Donner la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définissant la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$, avec $f \in C^1$ et f' ne s'annule pas. Justifier géométriquemet l'expression de cette suite.
(b) Quel est l'ordre de convergence de la méthode?Justifier, en utilisant un développement de Taylor approprié à la fonction f Y a-t-il des situations dans lesquelles l'ordre de convergence est plus élevé?
(c) On veut approcher la racine $\alpha = 0$ de $f(x) = x^2$. On utilise la fonction d'itération $g(x) = x - a\frac{f(x)}{f'(x)}$ avec a un paramètre réel. Pour quelles valeurs de a a t-on une convergence locale? Etudier l'ordre de convergence en fonction de a.
Exercice 4
On considère l'équation suivante:

$$f(x) = x^4 - 10x^3 - 15x^2 + 24 = 0 \tag{2}$$

(a) Faire une étude de la fonction f. En déduire le nombre de solutions de l'équation (2).

(b) Pour chacune des solutions précédentes déterminer une condition initiale telle que la suite des itérés de Newton converge vers cette solution.
(c) que se passe-t-il si $x_0 > 0$ et x_0 assez proche de 0?

Exercice 5

Montrer que si α est une racine double de l'équation $f(x) = 0$, alors $g'(\alpha) = \frac{1}{2}$,où g est la fonction itérative de Newton.
Montrer que la formule itérative modifiée $x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ a une convergence quadratique.
Utiliser les trois premières itérations pour approcher la solution de $\sin x = 1$, avec $x_0 = 1.5$.

Exercice 6

1. En appliquant la méthode de Newton à $f(x) = x^2 - 1$ avec x_0 proche de $\alpha = 1$, que valent les limites suivantes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^2} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^3}$$

2. Même question pour $f(x) = (x+2)(x-3)^2$ avec x_0 proche de $\alpha = 3$.

Exercice 7

On considère la fonction $f(x) = e^x - 4x^2$.
1. Montrer qu'il existe un zéro α pour la fonction f dans $[4, 5]$ et qu'il est unique.
2. Montrer que la méthode du point fixe $x = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ ne converge pas vers α.
3. Déterminer une méthode de point fixe qui converge vers α. Justifier.
4. Cette équation admet aussi une racine entre $x = 0$ et $x = 1$.Montrer que la méthode du point fixe $x = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ converge vers cette racine si x_0 est choisi dans l'intervalle $[0, 1]$

Exercice 8

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$.
1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine réelle α et une seule dans tout $\mathbb{R}$ et que cette racine est localisée dans l'intervalle $[3, 4]$.
2. Quel est le nombre n_1 d'itérations nécessaires à effectuer par la méthode de bissection pour obtenir une approximation de α à 10^{-6} près.

   1. Soit $g(x) = (1 + 3x^2)^{1/3}, x \in [3, 4]$

3. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ converge t-elle vers α pour tout $x_0 \in [3, 4]$.
4. Quel est le nombre n_2 d'itérations nécessaires à effectuer par l'itération $x_{n+1} = g(x_n)$ pour obtenir une approximation de α à 10^{-6} près à partir de $x_0 = 3$.