



Série n°4  
Intégrales impropres.

**Exercice 01** : Etudier la nature des intégrales impropres suivantes :

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(e^{-3\sqrt{t}+1})(e^{t+2})} \quad 2. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(cht)}{t^\alpha} dt \quad \alpha > 0 \quad 3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x(1+x^2)} dx \quad 4. \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{chx-1}} dx$$

$$5. \int_0^{+\infty} \frac{thx}{x^\alpha} dx \quad \alpha > 0 \quad 6. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-3x}-e^{-2x}}{x} dx \quad 7. \int_1^e \frac{x}{\sqrt[3]{\ln x(\ln x-1)}} dx$$

$$8. \int_0^{+\infty} \frac{|\cos x| dx}{\sqrt{x(x+1)}} \quad 9. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha) dx}{x} \quad \alpha > 0 \quad 10. \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos xt}{t^{3/2}} dt \quad 11. \int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$$

$$12. \int_0^{\pi/2} (\cos^\alpha x) (\sin^\beta x) dx \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Supp : 13.  $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{|1-\ln x|}}$  14.  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx$  15.  $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{\tan x(1-\tan x)}}$

16.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+t^2)(e^{-t}+1)}$  17.  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1} dx$  18.  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$  .

**Exercice 02** : Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{-\ln x}} dx \quad 2. \int_0^1 \frac{(-\ln x)^{9/2}}{x^2} dx \quad 3. \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx \quad 4. \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x (\cos 2x)^{3/2} dx}{\cos^5 x}$$

$$5. \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} \quad 6. \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^8} dx \quad 7. \int_0^{+\infty} \sqrt{x} 2^{-x^2} dx \quad 8. \int_{-1}^1 \frac{x^8}{\sqrt{|\ln x|}} dx$$

Supp :  $\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx \quad m > -1, n > 1 \quad \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cdot \cos^5 \theta d\theta \quad \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$

$$\int_0^{+\infty} 2^{-3x^2} dx, \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx, \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{-\ln x}} dx \quad 10. \int_0^1 x^4 \cdot \sqrt{1-x^2} dx$$

**Exercice 03**

En quels points la fonction  $\varphi$  est-elle dérivable ? A l'aide de la dérivée calculer sa valeur.

$$1. \varphi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^{2x}} dx \quad \alpha > -2 \quad 2. \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan xy}{y(1+y^2)} dy$$

$$3. \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-(x+1)t}}{t\sqrt{t}} dt \quad (x > -1) \quad 4. \varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin xt}{t} dt$$

Supp 5.  $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{1-\cos xt}{t^2} dt \quad 6. \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt}}{t^{a+1}} dt \quad 0 < a < 1.$