Série n°3 : Séries de Fourier

Exercice 01 : a) Tracer les graphes des fonctions suivantes et trouver les séries de Fourier qui leur correspondent.

1. $f(x) = \sup(sinx, 0) \quad x \in \mathbb{R}$

2. $f(x) = \mathrm{x}(\pi - \mathrm{x}) \quad 0 \leq x \leq \pi,$ *impaire et de période* $P = 2\pi$

3. $f(x) = ch(ax) \quad a > 0, -\pi < x < \pi$ *et de période* $P = 2\pi$

b) En déduire les sommes des séries suivantes :

$\sum_{n\geq1} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$; $\sum_{n\geq1} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$ $\sum_{n\geq1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}$; $\sum_{n\geq1} \frac{1}{(2n-1)^6}$; $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^6}$. $\sum_{n\geq1} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$; $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^2+1}$

Exercice 02 :

a) Développer en série de Fourier sinus : $f(x) = x \quad 0 < x < \pi$ (supp) $f(x) = e^x \quad 0 < x < 1.$

b) Développer en série de Fourier cosinus : $f(x) = sinx \quad 0 < x < \pi$ (supp) $f(x) = e^{-x}$ $0 < x < 1.$

c) (supp) Développer $f(x) = x^2, 0 < x < 2\pi$ en série de Fourier de période 2π .

Exercice 03 :

1. Développer en série de Fourier cosinus : 1. $\varphi(x) = |sinx| \quad 0 < x < 2\pi$.

2. Soit f une fonction paire, de classe C^2 et $2\pi -$ périodique et $a_n(f)$ ses coefficients de Fourier.

Montrer que $a_n(f") = -n^2 a_n(f)$.

3. Trouver une solution particulière et $2\pi -$ périodique de l'équation différentielle : $y" + y = \varphi(x)$.

Exercice 04 (extrait epfin16/17)

I. On considère la fonction f : $]0,1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1 - 2\mathrm{x}$

1) Montrer que la fonction f est développable en série de Fourier sinus sur $]0,1[$.

2) Calculer sa série de Fourier sinus étudier la nature de convergence sur $]0,1[$

en déduire les sommes : $S_1 = \sum_{n\geq1} \frac{sinn}{n}$, $S_2 = \sum_{n\geq1} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ *et* $S_3 = \sum_{n\geq1} \frac{1}{n^2}$

II. On cherche à résoudre le problème aux limites :

$$(E) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{avec les conditions} \quad \begin{cases} y(0,t) = y(1,t) = 0 \\ y(x,0) = f(x) & 0 < x < 1 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

1) En utilisant la méthode de séparation des variables ,montrer que

$y(x,t) = (c_1 cos\lambda t + c_2 sin\lambda t)(c_3 cos\lambda x + c_4 sin\lambda x)$ est une solution de (E) où $\lambda > 0$, c_1, c_2 c_3 *et* $c_4 \in R$.

2) Montrer que la solution du problème aux limites s'écrit : $y(x,t) = \sum_{n\geq1} \frac{2}{n\pi} cos2n\pi t \, sin2n\pi x$