Série n°2 *Séries de Fonctions - Séries Entières.*

I. Suites de fonctions

Exercice 01 : Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions $f_n \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ suivantes :

1. $I=[0,1]$ $\forall n \geq 1,$ $f_n(t) = \begin{cases} n^2 t & si \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2 t & si \quad \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{2}{n}, \\ 0 & si \quad \frac{2}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$

2 . $f_n(x)$ = arctannx , $I_1 = \mathbb{R}, I_2 = [a,+\infty[, a > 0$.

3. $f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2},$ $I_1 = \mathbb{R};$ $I_2 = [-a,a]$ $a > 0$

Supp : ii) $f_n(t) = \begin{cases} \frac{sint}{n+1} & si \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 + \text{thn} & si \quad \frac{\pi}{2} < t \leq 2 \end{cases}$ $iii)$ $f_n(x) = \frac{2nx}{1+nx}$ (Voir le cas I =[1/2,1])

$iv)$ $I = [0,1]$ $f_n(t) = \begin{cases} 2n^3 t^2 & si \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ 3n - n^2 t & si \quad \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{3}{n}, \\ 0 & si \quad \frac{3}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$, $v)$ $I = \mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{1}{1+e^{(x-n)^4}}.$

Exercice 02

1. Etudier la continuité des f_n *et celle de sa limite* f, en déduire la nature de convergence.

i) $f_n(x) = x\, e^{-n(2x-1)^2}$ $x \in \mathbb{R}$. ii) $f_n(x) = \begin{cases} (n-1)x & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 - x & si \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$

2. Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n$ et $\int_I f$ pour les suites de fonctions $\left(f_n(x)\right)_{n\geq 0}$:

i) $\frac{n^2 x}{1+(nx)^4}$ $x \in [0,1]$ ii) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{3-3\frac{x}{n}}{n} & si \quad 0 \leq x \leq n \\ 0 & si \quad x > n \end{cases}$

3. Etudier la nature de convergence des suites de fonctions

i) $f_n(x) = \int_2^x \frac{1+e^{-n(t-1)^2}}{t}$ dt $x > 2$. ii) $f_n(x) = 1 + \int_0^x \frac{sint}{1+(t-n)^2} dt, t \in [-a,a]$ $a > 0$

Exercice 03 : (supp) .

Trouver le plus grand intervalle de convergence uniforme des suites de fonctions $\left(f_n(x)\right)_{n\geq 0}$

1. $n(sinnx).\cos^n x$ $-\pi \leq x < \pi$. 2. $\frac{tannx}{e^x+(nx)^4}$, $x \in \mathbb{R}$. 3. $\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n$ $x \in \mathbb{R}$

4. $\frac{e^{-nx}}{1-e^{-x}}$, $x > 0$ 5. $\frac{sinnx}{\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$ 6. $\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right)$ $x \geq 0$. $f_n(x)$ = thnx

II.Séries de fonctions :

Exercice 01 : Trouver le domaine de convergence des séries de terme général :

1. $\frac{n!(1-e^{-x})^n}{n^n}$ 2. $\frac{(-1)^n}{n4^n(x-1)^n}$ 3. $e^{-nx}\sin nx$

4. $\frac{\cos nx}{n+\sqrt{n}}\,e^{-nx^2}$ 5. $\sqrt{\left|\sin\frac{x^2}{n} - tan\ \frac{x^2}{n}\right|}$. 6. $\frac{(-1)^n}{n^{x^2}}$.

(Supp) 1. $\frac{n!(1-x)^n}{n^n}$ 2.. $\frac{(-1)^n}{(n+1)(2x-1)^n}$ 3. $(-1)^n\left(n^{\frac{x^2}{n}}-1\right)$ 4. $e^{-nx^2}\cos nx$.

Exercice 02: Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in N}$ définie pour $tout\ \ x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = (-1)^n ln\left(1+\frac{x^2}{n(1+x^2)}\right).$$

a) Etudier la convergence normale et uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geq0} f_n(x)$.
b) Etudier la limite de $S(x) quand\ x \to +\infty$ $où\ \ S(x) = \sum_{n\geq0} f_n(x)$.

Exercice03 :

1. $Montrer\ que\ la\ série$ $\sum_{n\geq1}\frac{\sin nx}{n}$ converge uniformément sur $I = \left[a,\frac{\pi}{2}\right]$, *a > 0.*

2. On donne $\sum_{n\geq1}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi-x}{2}$ et $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer la somme de la série $\sum_{n\geq1}\frac{\cos nx}{n^2}$ pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 4 : (Supp)

Etudier la convergence simple et uniforme des séries de fonctions:

1.$\sum_{n\geq1}\frac{\cos nx}{n^2}$ 2. $\sum_{n\geq1} th\ nx - th(n-1)x$ $x \in \mathbb{R}$.

3.$\sum_{n\geq2}\log\left(1-\frac{x}{n^2}\right)$ $0 < x < 1$. 4. $\sum_{n\geq0} arctan\frac{x}{1+n(n-1)x^2}$ $x \in \mathbb{R}$.

III. Séries entières :

Exercice 01 : Déterminer le rayon et le domaine de convergence des séries :

1. $\sum_{n\geq1}\frac{x^n shn}{1+2...+n}$ 2. $\sum_{n\geq1}\left(1-\frac{lnn}{n^2}\right)^{-2n^2}$ $(x-3)^n$ 3. $\sum_{n\geq1}\left(n^{1/n}-1\right)(Z+2i)^n$

4. $\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2+\mathrm{sinn}}$. 5.$\sum_{n\geq0}\left(\frac{1+\mathrm{in}}{2+3\mathrm{in}}\right)^{\mathrm{n}}(Z-1)^n$. 6. $\sum_{n\geq1}\left(\cos\frac{1}{\mathrm{n}}\right)^{\frac{\mathrm{n}^2+1}{\mathrm{n}}} Z^n$.

Exercice02 : Vérifier la convergence et calculer les sommes des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} n\, e^{-(i+1)n}$ 2. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ 3. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n\, nx^n}{(2n)\,!}$ 4. $\sum_{n\geq 0} \frac{t^n \sin nt}{n!}$

5. $\sum_{n\geq 0} \frac{(2-x)^{2n+1}}{(n+1)}$. $0 < x < 1$. 6. $\sum_{n\geq 1} x^n \,\mathrm{sinn}\,\theta$ 7. $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n \sin n\theta}{n}$ $\theta \epsilon \mathrm{R}$, $|x| < 1$.

Exercice 03 : Développer en série entière autour de l'origine les fonctions suivantes :

1. $\frac{1-x^2}{1-2xch\theta+x^2}$ 2. $\frac{x^4}{1+x^2+x^4}$ 3. $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ 4. $(1+x)^\alpha$ $\alpha\epsilon\, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

5. $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 6. $Arc\sin x$ 7. $f(x) = \frac{1 \sin 4x}{\sin x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

8. $\int_0^1 \frac{ln\,(1+tu)}{u}\, du$ 9. $\sin x \,\mathrm{sh}\, x$ 10. $cos^3 x$.

Supp : $\frac{x+2}{3+2x-x^2}$, $\frac{1}{(1+x^2)(1+x)}$, $Arctan\frac{x-a}{1-ax}$, $Arg\,\mathrm{sh}\, x$, $\int_0^x \frac{Arctan\, u}{u}\, du$

Exercice 04 (Ratt.16/17) Soit f une fonction de classe C^∞ $dans\, \mathbb{R}$ telle que :
$f(0) = f'(0) = 1$ et $\forall n \geq 1$ $f^{(2n)}(0) = -4\; f^{(2n-2)}(0)$ et $f^{(2n+1)}(0) = -(2n+1)\, f^{(2n-1)}(0)$

1. Si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est le développement de $\mathrm{Mac-Laurin}$ de f , établir que

   $a_{2n} = \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!}$ et $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$, en déduire le rayon et le domaine de convergence de la série $associée$ à $f(x)$.
2. Exprimer la somme $f(x)$ en fonction des fonctions usuelles.
3. Vérifier que $l'intégrale\; I = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\, dx$ converge et l'exprimer sous forme d'une série numérique. Combien faut –il prendre de termes dans la série pour obtenir une valeur approchée de I à 10^{-3}prés et préciser le signe de l'erreur.

Exercice 05 (Supp)

1.Si $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n\, x^n$ avec $a_{n+3} = \frac{-a_n}{2}$ $\forall n \geq 0$,déterminer le domaine de convergence de la série et trouver une formule exlpicite de $f(x)$.

2. Même question avec $a_{n+5} = -a_n$ $\forall n \geq 0$.

Exercice 06 : Chercher sous forme d'une série entière une solution de l'équation différentielle :

1. $4xy''$ $+2y'$-+ y = 0 telle que $y(0) = 1$

2. $y'' - 2xy' - 4y = 0.$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$

supp.1. $x^2\, y'' + 4xy' - (2-x^2)y = 1$.

2. $(1+x)\, y' = \alpha$ y $\alpha > 0$ telle que $y(0) = 1$

3. $y'' + xy' - y = 0$