Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de Mathématiques
A.U 17/18
L2 Math : Analyse III

Série n°1 : Séries Numériques

Exercice 1 : (Séries télescopiques)

1) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique. On pose $u_n = a_n - a_{n+1}$.

i) Montrer que $\sum u_n$ converge ssi la suite$(a_n)_n$ converge .

ii) Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leurs sommes.

a)$\sum_{n=2}^{+\infty} Ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n(n+1)}\sin\frac{2n+1}{n(n+1)}$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty} Ln\left(cos\frac{x}{2^n}\right)$ $0<x<\frac{\pi}{2}$ d) $\sum_{n=1}^{+\infty} arctan\frac{1}{2n^2}$

(supp). 1. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$ 2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}sin^3(3^n\theta)$ $\theta \in R$ 3. $\sum_{n=1}^{+\infty} arctan\frac{8n}{n^4-2n^2+5}$.

4 . $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n}th\left(\frac{x}{2^n}\right)$. $\left(\frac{thx}{2}=\frac{1}{th2x}-\frac{1}{2thx}\right)$ 5. $\sum_{n\geq 0}\frac{\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$ 6. $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$ 7. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

Exercice 2 :

Montrer qu'il existe (a,b,c)∈ $\mathbb{R}^3$ tels que :$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+2)}$.

i) Calculer la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (en utilisant $s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$) en déduire la somme.

ii) Calculer les sommes $a) \sum_{n\geq 2}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$ $b)$ $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+3)(n+2)}$.

Exercice 3 :

Soit le polynôme de degré k : $P_k(x)=x\,(x-1)\ldots(x-(k-1))$ $k\geq 1$.

i) Calculer $\sigma_k = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P_k(n)}{n!}$ en utilisant la somme e= $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$

ii) En déduire les sommes des séries suivantes : $a) \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3+n^2+n+1}{n!}$. (supp) b) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+n+2}{n!}$ c) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3-n+1}{n!}$

Exercice 4 :

1) Montrer que la suite de terme général : $a_n = lnn! - \left(n+\frac{1}{2}\right)lnn + n$, converge. (

Ind : étudier la série de terme général : $u_n = a_n - a_{n+1}$).

2) Montrer que : $n! = K\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$, $K\in\mathbb{R}$. $(Formule\ de\ Stirling\ avec\ K=\sqrt{2\pi})$

Exercice 5:

1) Soit la série $\sum u_n$, on pose $v_n = (u_{2n}+u_{2n+1})$.

i) Montrer que : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ $alors$ $\sum u_n\ et\ \sum v_n$ sont de même nature et de même somme éventuellement.

ii) Vérifier le résultat pour a) $u_n = (-1)^n$ et b) $u_{2n}=-\frac{1}{n}+\left(\frac{sinn}{e}\right)^n$ $et\ u_{2n+1}=\frac{1}{n}$.

Exercice 6 :

Soit $a>0$

1) Montrer que $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+a} = \int_0^1\frac{1-t^a}{1-t}dt$.(ind : $u_n = \int_0^1 t^{n-1}\,(1-t^a)\,dt$)

2) Calculer cette somme pour a=1/2, a=1/3

3)(supp) Justifier que $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{1+na} = \int_0^1\frac{dt}{1+t^a}dt$

Exercice 7 : (supp)

a) Soit $u_n>0$ $\forall n\in N$. On pose $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$, $w_n = \frac{u_n}{1+{u_n}^2}$ $et\ z_n = \frac{1}{n}\left(u_1+\frac{u_1+u_2}{2}+\cdots+\frac{u_1+\cdots+u_n}{n}\right)$.

i) Montrer que les deux séries $\sum u_n et\ \sum v_n$ sont de même nature.

ii) Comparer la convergence des séries $\sum u_n$, $\sum w_n\ et\ \sum z_n$.

b) Déterminer l'ensemble des couples (a,b)∈ $\mathbb{R}^2$ tels que la série de terme général

$u_n = \frac{2^n+a^n}{2^n+b^n}$ soit convergente.

c) Déterminer l'ensemble des triplets (a,b,c)∈ $\mathbb{R}^3$ tels que la série de terme général

$u_n = \frac{1}{an+b} - \frac{c}{n}$ soit convergente.

Exercice 8 :

1)Quelle condition suffisante simple peut-on imposer à une fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que la série $\sum \frac{f(n)}{n^2}$ converge.

2)Soit f :$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une bijection, étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^2}$.

(vérifier que : $\forall\, n \geq 1 \qquad S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{8} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k^2}$)

Exercice 9 :

1) Soient α un réel tel que $0 < \alpha \leq 1$,et $(a_n)_n$une suite de réels positifs .On suppose que $\sum_{n\geq 1} a_n^\alpha$ converge.Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^\alpha \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^\alpha$,en déduire que la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} a_n$.
2) Soit $\sum_{n\geq 1} a_n$ une série à termes positifs convergente ,étudier la nature des séries :

   $\sum_{n\geq 1} a_n^2,\ \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+a_n}, \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{a_n}}{n}, \sum_{n\geq 1} a_n\ a_{2n}$
3) Soit $\sum_{n\geq 1} a_n$ une série à termes positifs divergente ,étudier la nature des séries :

   $\sum_{n\geq 1} a_n^2,\ \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+a_n}, ,\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+na_n}\ \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$

Exercice 10 : Déterminer la nature des séries de terme général :

1 . $\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{n}}{n!}$. 2. $\frac{2.5.8\ldots(6n-7)(6n-4)}{1.5.9\ldots(8n-1)(8n-7)}$. 3. $\frac{4^n n!}{n^n}$ 4 . $\frac{1}{n^\alpha ln^\beta n}$ 5. $\frac{\sqrt[5]{n+1}-\sqrt[5]{n}}{(\sqrt{n}+1)}$

6. $\frac{1}{n.lnn.ln(lnn)}$ 7. $\left(\frac{2n+3}{3n+1}\right)^{n^2}$ 8. $\frac{(ch\, n)e^{-\beta n}}{n^\alpha}$ 9. $\frac{\pi}{2} - arctan\, n^\alpha$

10. $\frac{1}{n}\left(1-\sqrt[n]{2}\right)^n$ 11. $\frac{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{\frac{9}{2}}-E\left(n^{\frac{9}{2}}\right)+\sqrt{n}}$ 12. $\sum_{n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}\ \alpha > 1$ 13. $\ln\left[1+sin\frac{1}{n^\alpha}\right]$

14. $\left(ln\frac{1}{cos\frac{1}{n}}\right)^n$ 15. $e^n\sqrt{n!}\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{k}$ 16. . $Arccos\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}$ 17. $\left[argch\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right]^\alpha$

18. $sin\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^n\pi\right)$ 19. $(\sin\frac{1}{n}).(\tan\frac{1}{n})\left[\!\left[cos\frac{1}{n}-1+\frac{1}{2n^2}\right]\!\right] n^{7/2}$.

20. $\tan\left(e^{-\sqrt[3]{1+\sqrt{n}}}\right)$ 21. $\frac{1}{n^\alpha}\sum_{n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}, \alpha > 1$ 22. $u_{2n} = u_{2n+1} = \left(\frac{1}{1+lnn}\right)^{2n}$ 23. $sin(2\pi\, n!\, e)$.

(supp)1 . $\frac{1.5\ldots(4n-3)}{2.4.6.10\ldots(4n-4)(4n-2)}$ 2. $\frac{n^{lnn}}{ln^n n}$ 3. $\frac{3^n n!}{n^n}$ 4 . $r^n|sinn\alpha\pi|$ r> 0 $et\ \ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 5. $\frac{\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}}{(2\sqrt{n}-1)}$ 6. $\frac{1}{ln(ln^\beta n)}$

8. $\frac{1}{n^\alpha}\sum_{2}^{n}\frac{1}{klnk}$ 9. $\frac{1+2+\cdots+n}{1^2+2^2+\cdots n^2}$ 10. $\frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)\left(5\sqrt[3]{n}-1\right)}$ 11. $\frac{e^n n!}{n^n}$ 12. $\frac{3^{2^n}}{2^{3^n}}$ 13. $\frac{13.5\ldots(2n-1)}{4.8.12\ldots 4n}$.

Exercice 11:

1) Montrer la convergence et Calculer les sommes des séries :

1. $\sum_{n\geq 0} a^n cosnx$ et $\sum_{n\geq 0} a^n sinnx\, , |a| < 1$ 2.$\sum_{n\geq 0}(1-a)\left(inf\left(a,\frac{1}{a}\right)\right)^n\ \ a \in R^+$.

3. $\sum_{n\geq 1}\frac{cosnx}{2^{2n}cos^n x}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{sinnx}{2^{2n}cos^n x}, x \in R.$ (supp)4. $\sum_{n\geq 1}\frac{chnx}{2^n ch^n x}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{shnx}{2^n ch^n x}, x \in R.$

2) Ecrire le nombre 32,54120312031203… sous forme p/q où p et q sont des entiers.
Vérifier que la répétition de motifs à partir d'un certain rang est une caractéristiques des nombres rationnels

3) Soit la série $53 - \frac{1}{2} + \frac{53}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{53}{2^4} + \cdots$

a) Déterminer si elle est absolument convergente, semi-convergente ou divergente.

b) Calculer sa somme en cas de convergence.

Exercice 12 :

Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $\frac{(-1)^n n^\alpha \sin\frac{1}{n^\alpha}}{n^\beta+(-1)^n}$ $\alpha,\beta > 0$ 2. $\frac{(-1)^n}{1+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}$ 3. $\frac{(-1)^n 4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$ 4. $\frac{(-1)^n}{n-\ln n}\cos 2n$ 5. $(\sin n)e^{-\alpha\sqrt{n}}$

6. $\mathrm{Ln}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ 7. $\left(\frac{5+n(2i-1)}{n(3+i)-2}\right)^n$ 8. $\frac{n(i-1)^n}{3^n}$ 9. $\sin(\pi\, n!\, e)$ 10. $\sum_n^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$ 11. $\int_n^{n+\frac{1}{2}}\frac{\sin t\, dt}{\sqrt{t^4+1}}$

12. $\left(\left(\sqrt{n^2+n+1}\right) - \sqrt[3]{n^3+\frac{3}{2}n^2+1}+a+\frac{b}{n}\right)$ 13. $f\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ ($\alpha > 0$, f *de classe* C^2 au voisinage de 0)

(Supp) 1. $\tan\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ 2. $\frac{(-1)^n \cos n\frac{\pi}{3}}{\sqrt{n}}$ 3. $f\left(a+\frac{1}{n}\right)+f\left(a-\frac{1}{n}\right)-2f(a)$ (f de classe C^2 au voisinage de a)

4. $(-i)^n \arctan\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 5. $\frac{\cos\sqrt{n}}{2n\sqrt{n}}$ 6. $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt[3]{n+1}}$ 7. $(-1)^n\sqrt[n]{1/2}$ 8. $(-1)^n\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

9. $\cos\left(\pi\sqrt[3]{n^3+\frac{3}{2}n^2+1}\right)$ 10. $u_{2n}=\frac{-1}{3^n}$, $u_{2n+1}=\frac{1}{2n+1}$ 11. $\frac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n}$. 12. $\left(\tan\left(\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\right)\right)$

Exercice 13(*Majoration du reste de série)*

Soit $\sum_{n\geq 1} a_n$ une série à termes positifs convergente et soit R_n *son reste* .

1. Vérifier que si $\exists k < 1$ $\forall n > n_0$ $a_n < k^n$ *alors* $R_n < \frac{k^{n+1}}{1-k}$
2. " " $\frac{a_{n+1}}{a_n} < k$ *alors* $R_n < \frac{a_{n+1}}{1-k}$

Applications :

a) Combien faut-il prendre de termes dans la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+5^n}$ pour avoir la somme à 10^{-2},10^{-3} près .

b) Même question pour la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{10^n}{(n!)^2}$.

Exercice 14 (*Majoration du reste de la série de Riemann)*

Soit $R_n=\sum_{k\geq n+1}\frac{1}{k^\alpha}$ $\alpha > 0$:le reste d'ordre n de la série de *Riemann.*

a) Prouver que pour $m \geq 1$ $R_n - R_{n+m} \leq \int_n^{n+m}\frac{dx}{x^\alpha}$ en déduire que $R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

b) A partir de quel n a-t-on $R_n \leq 10^{-k}$?

Exercice 15 (*Majoration du reste de la série* alternée*)*

Soit $\sum_{n\geq 1}(-1)^n V_n$ une série alternée convergente et S_n sa somme partielle d'ordre n, montrer que :

i. $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
ii. $|R_n| \leq V_{n+1}$ où R_n est le reste d'ordre n.
iii. Le signe de R_n est le même que celui de son premier terme

Exercice 16 (supp)

1) Soit la série $-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}+\ldots$

Evaluer l'erreur commise en remplaçant la somme de la série par les quatre premiers termes, par la somme des cinq premiers termes. Que peut on- dire du signe de ses erreurs ?

2) Combien faut-il prendre de termes dans la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-1}{(3n+1)4^n}$ pour avoir la somme de la série à10^{-3}prés ?

Exercice 15:

a) Montrer que le produit de la série semi-convergente $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *par elle − même* est une série divergente.

b) Montrer que le produit de la série semi-convergente $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ *par elle − même* est une série convergente.

Exercice 16 :

a) Former le produit (de Cauchy) des séries $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ est ce que ce produit est convergent ?

(supp) b) Former la série : $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots.+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\right)^2$ est ce que cette série converge?

(supp) c) Soit la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\left((n+1-k)\ln(2+k)^{\sqrt{k+2}}\right)^2}$

i) De quelles séries est le produit de Cauchy ?

ii) En déduire si elle est absolument convergente, semi-convergente ou divergente.