Université de Tlemcen.

Département de mathématiques

le 30/11/2017.

Algèbre 3

Serie n° 3 Réduction des endomorphismes.

Exercice n° 1

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E qui à f associe sa dérivée f'. Déterminer les valeurs propres de D

Exercice n° 2

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et I l'endomorphisme de E qui à f associe sa primitive qui s'annulle en 0. Déterminer les valeurs propres de I

Exercice n° 3

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E, montrer que :

$$0 \notin Sp(f) \iff f \text{ surjective}.$$

Exercice n° 4

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}(X)$ défini par $f(P(X)) = (X-1)P(X)$. Montrer que f n'a pas de valeurs propres.

Exercice n° 5

Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie.

1) Justifier que tout endomorphisme possède au moins une valeur propre.

Exercice n° 6

Montrer que toute matrice A de $M_2(\mathbb{R})$ symétrique est diagonalisable.

Exercice n° 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1/ Calculer $AM - MA$.

2°/ Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ defini par $f(M) = AM - MA$, determiner les valeurs propres de f.

Exercice n° 8

Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que : $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} = M(f)_{e_i}$ où (e_i) est une base qqe de E

A est elle diagonalisable ?

Exercice n° 9

Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$

$Q \longmapsto f(Q) = (2X+1)Q - (X^2-1)Q'$

Calculer $f^n(a_0 + a_1 X + a_2 X^2)$

Exercice n° 10

Soit $A_t = \begin{pmatrix} t & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1/ Sans calculer $P_{A_t}(\lambda)$ montrer que $(t-1)$ est une valeur propre de A_t, determiner E_{t-1} et que peut on dire de la multiplicité de $(t-1)$

2°/ En déduire le spectre de A_t, A_t est elle diagonalisable ?