Université de Tlemcen. le 08/10/2017.
Département de mathématiques.
Algèbre 3

Série n° 1 : Déterminants.

Exercice n° 1 :

1°/ Montrer sans le calculer que

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 1 & 8 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

2°/ Montrer sans le calculer que le déterminant suivant est divisible par 13

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

3°/ Montrer que $D = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$ sans le developper.

$a, b, c \in \mathbb{R}$

Exercice n° 2 :

Calculer les determinants suivants :

$$D_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{pmatrix} \quad D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice n° 3

Calculer le determinant d'ordre n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix} \qquad a_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, \dots, n.$$

Exercice n° 4

Montrer que pour $n > 2$

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & & a_2 - b_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & & a_n - b_n \end{vmatrix} = 0 \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}.$$

Exercice n° 5

$$\text{Soit } D = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{}^{k} & \overbrace{}^{n-k} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & C \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \}k \\ \}n-k \end{array} \quad A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{K})$$

1/ Montrer que $\det D = \det A \times \det C$.

2/ Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right) = \det(A+B) \det(A-B)$.

Exercice n° 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA = \overline{A}$. Montrer que $\det A \in \mathbb{R}$.

Exercice n° 7

Soit $a \in \mathbb{R}$, on note Δ_n le determinant suivant.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

1/ Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}

2/ Démontrer que : $\forall n \geq 2 \quad \Delta_n = a^n - a^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2$

Exercice n° 8

Soient $x, a_0, \dots, a_n$ des élément de $\mathbb{R}$

et D_n le determinant d'ordre $(n+1)$ suivant $D_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$

Calculer D_n.

Exercice n° 9

1°/ Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2°/ Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs.
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} ; \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3°/ Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de $\mathbb{R}^3$ à coefficients entiers est un nombre entier

Devoir n° 2 : à faire à la maison

1°/ Calculer le déterminant suivant :
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

2°/ Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -I_{dE}$.
Que dire de la dimension de E ?

3°/ Soient X, Y deux matrices carrés non nulles de même taille à coefficients réels, montrer que
si $XY = 0$, les matrices X et Y ne sont pas inversibles.