Université de Tlemcen A.U. 2017/2018

Département de mathématiques

Algèbre 3

Série n° 0 : Révisions

Exercice n° 1

1°/ Soit $\mathbb{R}^4$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$F_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y = 2t+z\}$$

$$F_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 2x+3y+3z-2t = 0,\ x+5y+z+3t = 0\}$$

Déterminer $\dim F_1$ et $\dim F_2$

2°/ Soit $\mathbb{R}_4[X]$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des polynômes à une indéterminée à coefficient dans $\mathbb{R}$ et de degré inférieur ou égal à 4.

P_1 et P_2 les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}_4[X]$ définis par :

$$P_1 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] / \int_0^1 P(x)\,dx = 0\}$$

$$P_2 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] / P(X) - P'(X)(X+1) = 0\}$$

3°/ Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de type 3 et coefficients dans $\mathbb{R}$, E le sous espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$E = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / {}^tA = A\}$$

Exercice n° 2

On considère $F = [v_1, v_2, v_3]$ et $G = [w_1, w_2]$ deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ avec :

$v_1 = (1,-1,0,2)$; $v_2 = (2,1,3,1)$; $v_3 = (4,5,9,-1)$

$w_1 = (1,1,1,1)$; $w_2 = (3,-4,4,2)$

Déterminer une base de F, une base de G et une base de $F \cap G$.

Exercice n°3

1/ Montrer que les vecteurs.

$v_1 = (1,2,-1,0,1)$, $v_2 = (2,1,1,1,1)$, $v_3 = (3,2,0,1,2)$.

forment une famille libre de $\mathbb{R}^5$

2°/ Determiner 2 vecteurs w_1 et w_2 de $\mathbb{R}^5$ de manière à ce que la famille $\{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2\}$ soit une base de $\mathbb{R}^5$.

Exercice n°4

1°/ On considère les applications $f_n (n\in\mathbb{N})$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies par $f_n(x) = e^{nx}$. Montrer que $\{f_0, \dots, f_n\}$ est libre.

2°/ On considère les applications $f_n (n\in\mathbb{N})$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définis par $f_n(x) = x^n$. Montrer que $\{f_0, \dots, f_n\}$ est libre et en déduire $\dim \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice n°5

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n\in\mathbb{N}$, F et G deux sous espaces vectoriels de E. Montrer que:

$$(\dim F + \dim G > n) \Longrightarrow (F\cap G \text{ contient un vecteur non nul}$$

Exercice n°6

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel finie n, f un endomorphisme de E.

Montrer que:

$$(\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f) \Longleftrightarrow f^2 = 0 \text{ et } n = 2\operatorname{rg} f.$$

Exercice n° 7

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$ telles que :

$$f \circ g \circ f = f \qquad \text{et} \qquad g \circ f \circ g = g$$

Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$

Exercice n° 8

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$; (b) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$; (c) $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Exercice n° 9

Soit N une matrice carrée, on dit que N est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$.

Montrer que si N est nilpotente alors $(I - N)$ est inversible

Application : Calculer l'inverse de la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a, b, c \in \mathbb{R} .$$

Devoir n° 1 : à faire à la maison.

1°/ Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $AB = BA$ on a la formule du binôme $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$

2°/ A-t-on le même résultat si A et B ne commutent pas ? (ie $AB \neq BA$).