Université de Tlemcen :: Faculté des sciences :: Département de mathématiques

2ème année LMD MI - Mathématiques - (Semestre 3)

Epreuve de rattrapage de logique mathématique

25 Juin 2018

Question de cours

Etant donnée une quelconque formule propositionnelle F, désignons par p(F), l'ordre de F et par q(F), le nombre d'atomes qui composent F. A-t-on

$$p(F) < q(F)\ ? \qquad p(F) = q(F)\ ? \qquad p(F) > q(F)\ ?$$

Justifier.

Exercice 1

Soient S et T deux formules propositionnelles quelconques. Etablir que

$$\vDash\ S \Rightarrow (T \Rightarrow S).$$

Exercice 2

Soit A(.,.) un ion à deux places, de champ $\Omega := \{a, b, c\}$. Considérons la formule prédicative

$$P := \forall x\, A(x, y) \Rightarrow A(x, y)$$

1. Etudier la nature des variables.
2. Enumérer les entrées de la table des valeurs de la formule P. En déduire le nombre de lignes de la table de valeurs de P.

Exercice 3

Trois personnes nommés respectivement : Anis , Bachir et Djamel, comparaissent devant le tribunal pour vol. Ils prêtent serment de la manière suivante :

Anis dit : *Bachir est innocent et Djamel est coupable.*

Bachir dit : *Je suis innocent, mais au moins un de mes amis est coupable.*

Djamel dit : *Si Anis est coupable, alors Bachir est coupable également.*

Posons :

a := « Anis est innocent »,

b := « Bachir est innocent »,

c := « Djamel est innocent ».

1. Exprimer les serments des trois accusés, en fonction des propositions logiques a, b et c et dresser la table des valeurs des trois formules obtenues.
2. Si l'on suppose que les trois accusés sont innocents, qui a alors menti ?

Exercice 4

Une riche dame lègue à ses trois filles dix sept vases d'ornement en précisant que l'aînée devra prendre la moitié, la plus jeune, le tiers et la cadette, le neuvième du legs. Pouvez vous aider les trois filles à se partager les dix sept vases, conformément au désir de leur mère.

Corrigé de l'épreuve de rattrapage de logique mathématique

25 Juin 2018

Question de cours

Les trois relations peuvent avoir lieu. En effet :

Pour $F_1 := a \Rightarrow b$, on a : $p(F_1) = 1$ et $q(F_1) = 2$; donc $p(F_1) < q(F_1)$

Pour $F_2 := a \Rightarrow \neg b$, on a : $p(F_2) = 2$ et $q(F_2) = 2$; donc $p(F_2) = q(F_2)$

Pour $F_3 := \neg a \Rightarrow \neg b$, on a : $p(F_3) = 3$ et $q(F_1) = 2$; donc $p(F_3) > q(F_3)$

Exercice 1

Examinons le cas particulier où les formules S et T sont atomiques. Posons $F := a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$, où a et b sont des atomes. La table de valeurs de A se présente comme suit

a	b	$b \Rightarrow a$	F
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	1	**1**

montrant que la formule F est valide. Le théorème de substitution permet de conclure que la formule $S \Rightarrow (T \Rightarrow S)$ est valide, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 2

1. La formule P contient deux variables avec deux occurrences pour chacune. Plaçons des indices à ces dernières pour les distinguer.

   $$P := \forall x_1 \, A(x_1, y_1) \Rightarrow A(x_2, y_2)$$

   L'occurrence x_1 est liée par le quanteur $\forall$ et les trois autres sont libres.

2. En entrée de la table de valeurs de la formule P, on associe, pour chaque réalisation, une fonction booléenne à l'ion A(.,.) et on attribue un élément du champ Ω à chaque occurrence libre de variable.

   Les fonctions booléennes associées à l'ion A(.,.) sont définies sur le produit cartésien Ω^2 qui est de cardinal 9 ; leur nombre est 2^9, d'après le principe fondamental d'arithmétique.

   Conformément à ce même principe, la table de valeur de P est formé de

   $$2^9 \cdot 3^3 = 13824 \text{ lignes}$$

Exercice 3

Voir Al Wadjiz, pages 343, 344 et 345.

Exercice 4

Voir MP 1, page 50.