Faculté des Sciences 2017/2018
Département de Mathématiques Durée: 90 mn

Rattrapage d'analyse numérique 1

Exercice 1

Pour les itérations a)-d)

i) Vérifier la convergence de la suite vers α pour x_0 proche de α

ii) Si la suite converge quel est l'ordre de convergence?

a) $x_{k+1} = -1 + x_k + x_k^2 \qquad \alpha = 2$

b) la méthode de Newton appliquée à $f(x) = x\,(1-x)^2 \qquad \alpha = 1$

c) $x_{k+1} = x_k^2 + x_k^{-2} - 1 \qquad \alpha = 1$

d) la méthode de Newton appliquée à $f(x) = \sin x \qquad \alpha = \pi$

Solution

a) on pose $g(x) = -1 + x + x^2$ alors $g'(x) = 1 + 2x$ et $|g'(\alpha)| = 5 > 1$.
$\alpha = 2$ est un point fixe répulsif, la suite ne converge pas vers α, pour tout choix de x_0.

b) f est de classe C^2,comme $\alpha = 1$ est une racine double de f alors la méthode de Newton converge linéairement vers α pour x_0 proche de α.

c) on pose $g(x) = -1 + x^2 + x^{-2}$ alors $g'(x) = 2(x - x^{-3}) \Rightarrow g'(1) = 0$ la méthode converge au moins quadratiquement vers α.
Sachant que $g''(x) = 2(1 + 3x^{-4}) \Rightarrow g''(1) = 8 \neq 0$ alors la méthode converge à l'ordre 2 vers α.

d) f est de classe C^2, comme $\alpha = \pi$ est une racine simple de f alors la méthode de Newton converge quadratiquement vers α pour x_0 proche de α.

Exercice 2

1. Démontrer l'unicité du polynôme d'interpolation quadratique.
2. Soit $p_2(x)$ le polynôme d'interpolation associé aux données: $(0,0)\,,(1,\alpha)\,,(2,3)\,.$ Trouver α sachant que le coefficient de x dans $p_2(x)$ est 3.
3. Soit $p_2(x)$, le polynôme qui interpole $f(x) = x^3$ aux noeuds $(0,0)\,,(-1,-1)\,,(1,1)$ sans déterminer l'équation de $p_2(x)$, calculer $e(x) = f(x) - p_2(x)$, et déterminer en quel(s) point(s) de $[-1,1]\,,$ $e(x)$ est maximale.

Solution

1. On suppose que p et q sont deux polynômes d'interpolation quadratique associés aux données $(x_0,y_0)\,,(x_1,y_1)\,,(x_2,y_2)$ alors
$$\begin{cases} p(x_i) = y_i \text{ pour } i = 0,1,2 \\ q(x_i) = y_i \text{ pour } i = 0,1,2 \end{cases}$$
On pose $r(x) = p(x) - q(x)$, r est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. De plus $r(x_i) = 0$ pour $i = 0,1,2.$ alors r posséde 3 racines, il est identiquement nul.
d'où l'unicité du polynôme d'interpolation quadratique.

2. Sous forme de Newton $p_2(x) = \alpha x + \dfrac{3-2\alpha}{2} x(x-1) = \dfrac{3-2\alpha}{2} x^2 + \left(\alpha - \dfrac{3-2\alpha}{2}\right) x.$
$$\alpha - \frac{3-2\alpha}{2} = 3 \Rightarrow \alpha = \frac{9}{4}.$$

3. pour tout $x \in [-1,1]$ il existe $\xi_x \in (-1,1)$ tel que $e(x) = f(x) - p_2(x) = \dfrac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!} x\,(x+1)\,(x-1) = x\,(x+1)\,(x-1)\,.$

$e'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow e'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow \max_{x\in[-1,1]} e(x) = e(-\sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Exercice 3

1. Pour le problème $x = g(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$ sur $[1, 2]$. Déterminer si les hypoyhèses du théorème du point fixe sont satisfaites. Peut-on conclure l'existence et l'unicité du point fixe?
2. Montrer que g admet un point fixe unique x^* sur $[1, 2]$.
3. Déterminer un schéma itératif de point fixe convergeant vers x^* pour tout choix initial $x_0 \in [1, 2]$. Justifier.

Solution

1. la fonction g est continue sur $[1, 2]$ mais $g(1) = 6 \notin [1, 2]$. et $g'(x) = 1 - 3x^2 - 8x$ $\Rightarrow g''(x) = -6x - 8 < 0, \forall x \in [1, 2]$.
donc $g'(x)$ est strictement décroissante sur $[1, 2]$.$g'(1) = -10$ et $g'(2) = -27$ alors $\forall x \in [1, 2], |g'(x)| > 1$.
Les hypothèses du théorème du point fixe ne sont pas satisfaites.
On ne peut rien conclure.
2. On pose $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 10$. Le problème $x = g(x)$ est équivalent au problème $f(x) = 0$.
f est une fonction continue sur $[1, 2]$ qui vérifie $f(1) = 5 > 0$ et $f(2) = -14 < 0$.
D'après le théorème des valeurs intermédiares il existe au moins $x^* \in [1, 2]$ tel que $f(x^*) = 0$.
$f'(x) = -3x^2 - 8x < 0, \forall x \in [1, 2]$,donc la fonction f est strictement décroissante sur $[1, 2]$.
En conclusion: Il existe un unique $x^* \in [1, 2]$ tel que $f(x^*) = 0$ ce qui veut dire que g admet un point fixe unique x^* sur $[1, 2]$.
3. $\forall x \in [1, 2]$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 - 4x^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow (4 + x)\, x^2 = 10 \Leftrightarrow x^2 = \frac{10}{4 + x} \Leftrightarrow x = \left(\frac{10}{4 + x}\right)^{1/2} \Leftrightarrow x = \varphi(x)$
avec $\varphi(x) = \sqrt{10}\,(4 + x)^{-1/2}$. Remarquons d'abord que φ est continue sur $[1, 2]$, $\varphi(1) = \sqrt{2} \in [1, 2]$ et $\varphi(2) = \sqrt{\frac{5}{3}} \in [1, 2]$.
De plus $\varphi'(x) = -\frac{\sqrt{10}}{2}\,(4 + x)^{-3/2} < 0$ alors $\forall x \in [1, 2], \varphi([1, 2]) \subset [1, 2]$.
$\varphi''(x) = \frac{3\sqrt{10}}{4}\,(4 + x)^{-5/2} > 0$ Comme $\varphi'(1) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$ et $\varphi'(2) = -\frac{1}{12}\sqrt{\frac{5}{3}}$ alors $\forall x \in [1, 2], |\varphi'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{10} < 1$.
Les hypothèses du théorème du point fixe sont satisfaites alors la suite définie par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers x^* pour tout choix initial $x_0 \in [1, 2]$.

Exercice 4

On veut calculer une approximation de $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ par la formule de quadrature suivante: $Q(f) = \omega_0 f(-\alpha) + \omega_1 f(0) + \omega_2 f(\alpha)$

1. Déterminer les poids $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ en fonction de α de sorte que $Q(p)$ soit exacte pour tout polynôme $p(x)$ de degré ≤ 2.

Dans la suite on considère $f(x) = \cos(x)$.

2. Quelle formule de quadrature $Q(f)$ est obtenue si $\alpha = 1$? Dans ce cas donner et calculer la borne de l'erreur commise.

3. Si on considère maintenant α comme inconnue, déterminer sa ou ses valeurs pour que la formule de quadrature soit exacte pour des polynômes de degré strictement supérieur à deux. Quel est le degré de précision de la ou des formules obtenues?

4. On veut une formule de même type sur l'intervalle $[0,1]$. En utilisant un changement de variable, déduire de ce qui précède le meilleur choix des points a, b et des poids $\widetilde{\omega}_0, \widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2$ pour que $\widetilde{Q}(f) = \widetilde{\omega}_0 f(a) + \widetilde{\omega}_1 f(\frac{1}{2}) + \widetilde{\omega}_2 f(b)$, soit une formule de quadrature de plus haut degré de précision possible pour $I(f) = \int_0^1 f(x)dx$.

Solution

1. $Q(p)$ est exacte pour tout polynôme $p(x)$ de degré ≤ 2 est équivalent à $I(x^k) = Q(x^k)$ pour $k = 0, 1, 2$. Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 2 \\ -\omega_0 + \omega_2 = 0 \\ \alpha^2 (\omega_0 + \omega_2) = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Si $\alpha = 0$ alors la troisième équation donne $0 = \dfrac{2}{3}$ imposible donc $\alpha \neq 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 2(1-\omega_0) \\ \omega_0 = \omega_2 \\ \omega_0 = \dfrac{1}{3\alpha^2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{3\alpha^2} \\ \omega_1 = 2(1 - \dfrac{1}{3\alpha^2}) \\ \omega_2 = \dfrac{1}{3\alpha^2} \end{cases}$$

2. si $\alpha = 1, Q(f) = \dfrac{1}{3}[f(-1) + 4f(0) + f(1)]$ C'est la formule de Simpson.

Dans ce cas $E(f) = I(f) - Q(f) = -\dfrac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \xi \in [-1,1]$ et $h = \dfrac{b-a}{2} = 1$

D'ou $|E(f)| \leq \dfrac{1}{90} M$ avec $M = \max\limits_{x \in [-1,1]} \left| f^{(4)}(x) \right| = \max\limits_{x \in [-1,1]} |\cos(x)| = 1.$

Finalement $|E(f)| \leq \dfrac{1}{90}$.

3. $I(x^k) = Q(x^k)$ pour $k > 2$

Si $k = 3$ on n'obtient pas d'information supplémentaire pour déterminer α.

Si $k = 4$ $\quad I(x^k) = \dfrac{2}{5} = \dfrac{2\alpha^2}{3} = Q(x^k) \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

La formule de quadrature s'écrit: $Q(f) = \dfrac{5}{9} f(-\sqrt{\dfrac{3}{5}}) + \dfrac{8}{9} f(0) + \dfrac{5}{9} f(\sqrt{\dfrac{3}{5}})$.

Calcul du degré de précision de la formule obtenue:

Si $k = 5$ $\quad I(x^5) = 0 = Q(x^5)$

Si $k = 6$ $\quad I(x^6) = \dfrac{2}{7} \neq \dfrac{2}{5} = Q(x^6)$

En conclusion, le degré de précision de la formule est 5.

4. On pose $x = \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{2}$ alors $dx = \dfrac{1}{2}dt$ et $I(f) = \int_0^1 f(x)dx = \dfrac{1}{2}\int_{-1}^1 f(\dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{2})dt$

D'après ce qui précéde $a = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{5}} + \dfrac{1}{2}, b = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{5}} + \dfrac{1}{2}, \widetilde{\omega}_0 = \widetilde{\omega}_2 = \dfrac{5}{18}$ et $\widetilde{\omega}_1 = \dfrac{4}{9}$.

$$\widetilde{Q}(f) = \frac{5}{18} f(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{1}{2}) + \frac{4}{9} f(\tfrac{1}{2}) + \frac{5}{18} f(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{1}{2}).$$