

Epreuve finale de logique mathématique

24 Janvier 2018

Durée : 1 h 30 mn

Questions de cours

1. Quelle différence y a-t-il entre implication matérielle et implication de cause à effet ?
2. On dit qu'un énoncé A est une caractérisation d'un énoncé B ; expliquer et citer un exemple.
3. Citer un exemple familier qui justifie la définition de l'implication matérielle.
4. A quoi servent les axiomes de Peano.
5. Citer la définition de la barre de Pierce. Quel nom lui donnons-nous en structure machine ?
6. Quelle différence y a-t-il entre une démonstration par récurrence simple et une démonstration par récurrence généralisée ?
7. Énoncer les deux lois de De Morgan.
8. On parle de propriété d'involution concernant le connecteur logique « négation » et de propriété d'idempotence concernant le connecteur logique « conjonction » ; expliquer pourquoi.
9. Énoncer un paradoxe de votre choix.

Exercice 1

I – Soit la formule propositionnelle

$$P := ((a \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow a$$

où a et b sont des atomes.

1. Citer une construction de la formule P.
2. Représenter cette construction en arbre.
3. Quel est l'ordre de la formule P ? Écrire clairement la définition.
4. Établir que $\models P$.

II – Soient S et T deux formules propositionnelles ; établir que

$$\models ((S \Rightarrow T) \Rightarrow S) \Rightarrow S$$

$$(S \Rightarrow T) \Rightarrow S \vdash S$$

Exercice 2

Soit A(.) un ion à une place, de champ $\Omega := \{a, b, c\}$, et soit B, une formule propositionnelle. Considérons la formule prédicative

$$P := \forall x (A(x) \Rightarrow B) \Rightarrow A(x)$$

1. Étudier la nature des deux occurrences de variable.
2. Énumérer les entrées de la table des valeurs de la formule P.
3. De combien de lignes, la table des valeurs de la formule P, est-elle formée ? Expliquer pourquoi.
4. Effectuer l'analyse évaluante d'une ligne de cette table, de votre choix.
5. La formule P n'est pas close. Expliquer pourquoi.
6. Quelles sont les clôtures possibles de P ?

Corrigé de l'épreuve finale de logique mathématique

Exercice 1

I-

1. La séquence de formules suivantes est une construction de la formule P.

$A_1 := a$ (atome)

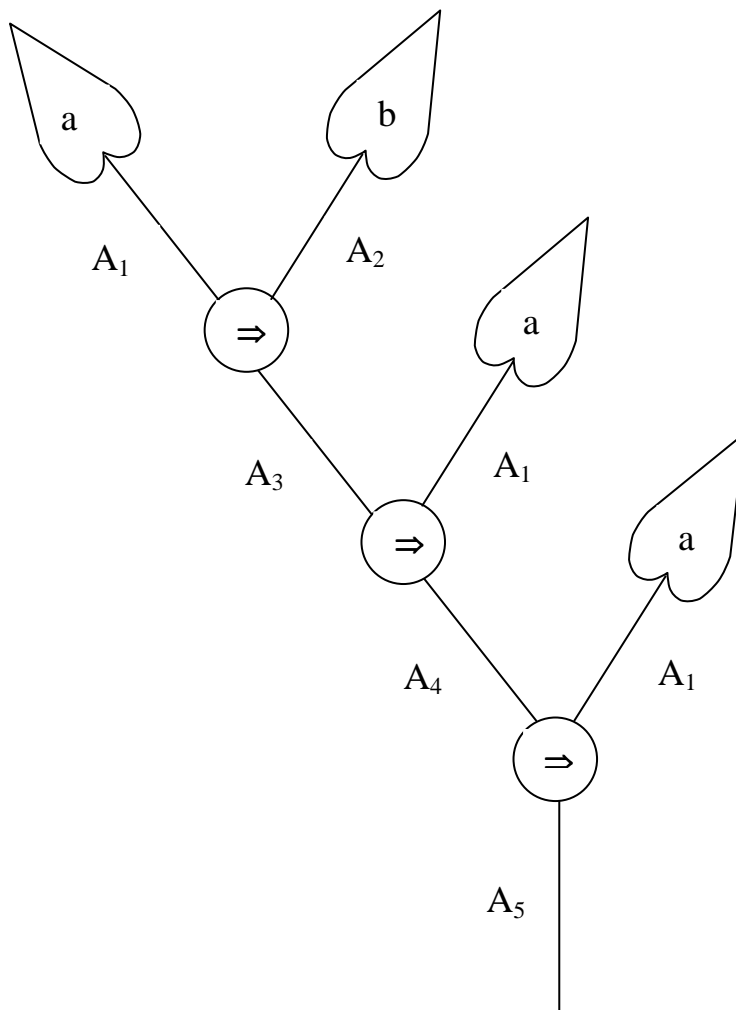
$A_2 := b$ (atome)

$A_3 := A_1 \Rightarrow A_2$

$A_4 := A_3 \Rightarrow A_1$

$A_5 := A_4 \Rightarrow A_1$

2. Représentation arborescente de la construction précédente :



N.B. La lecture est effectuée de gauche à droite.

3. L'ordre de la formule est 3. Il s'agit du nombre d'occurrences des connecteurs logiques figurant dans la formule P (trois fois l'implication matérielle.)

4. Dressons la table des valeurs de la formule P.

a	b	$a \Rightarrow b$	$(a \Rightarrow b) \Rightarrow a$	P
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Selon cette table, la formule P est valide.

II- Posons

$$Q := ((S \Rightarrow T) \Rightarrow S) \Rightarrow S$$

La formule Q est obtenue, en remplaçant dans la formule P, l'atome a par la formule A et l'atome b par la formule B. La formule P étant valide, la formule Q l'est également, en vertu du théorème de substitution.

Montrons que la formule S est une déduction formelle de la formule $(S \Rightarrow T) \Rightarrow S$. Considérons en effet la séquence de formules suivantes :

$$F_1 := ((S \Rightarrow T) \Rightarrow S) \Rightarrow S \quad (\text{formule valide})$$

$$F_2 := (S \Rightarrow T) \Rightarrow S \quad (\text{formule hypothèse})$$

$$F_3 := S \quad (\text{m.-p. } (F_2, F_1))$$

Exercice 2

1. La première occurrence de x est liée par le quanteur existentiel et la seconde occurrence est libre. Pour éviter la confusion, réécrivons la formule P comme suit :

$$P := \forall x (A(x) \Rightarrow B) \Rightarrow A(y)$$

2. La table des valeurs de la formule prédicative P admet en entrée :

- Les deux valeurs logiques affectées à tour de rôle à B.
- Les trois éléments de Ω , attribués à tour de rôle à y.
- Les huit fonctions logiques associées à l'ion A(.) et au domaine Ω .

3. D'après le principe fondamental d'arithmétique, la table des valeurs de P est formée de

$$2 * 3 * 8 = 48 \text{ lignes.}$$

4. Affectons à B, la valeur logique 0, attribuons à y, l'élément b, de Ω et associons à l'ion A(.), la fonction logique suivante :

$$\varphi(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t = a \\ 0 & \text{si } t = b \\ 1 & \text{si } t = c \end{cases}$$

La valeur logique de l'ion $A(y)$ est $\varphi(b)$, c'est à dire 0. Passons en revue les diverses interprétations de l'ion $A(u) \Rightarrow B$:

u	A(u)	B	$A(u) \Rightarrow B$
a	0	0	1
b	0	0	1
c	1	0	0

La valeur logique de l'ion $\forall x (A(x) \Rightarrow B)$ est donc 0 et celle du prédicat P est 1.

5. La formule P n'est pas close car elle contient une occurrence libre de variable.
6. On peut clôturer la formule P de quatre manières différentes, à savoir :

$$\forall x (A(x) \Rightarrow B) \Rightarrow \forall y A(y)$$

$$\forall y [\forall x (A(x) \Rightarrow B) \Rightarrow A(y)]$$

$$\forall x (A(x) \Rightarrow B) \Rightarrow \exists y A(y)$$

$$\exists y [\forall x (A(x) \Rightarrow B) \Rightarrow A(y)]$$

Questions de cours

1. Par implication matérielle on sous-entend le connecteur, la fonction booléenne « implication », admettant les quatre interprétations définies par la table de valeurs. L'implication de cause à effet, par contre, admet une seule interprétation ; c'est la notion d'implication utilisée dans une démonstration déductive.
2. Dire que l'énoncé A est une caractérisation de l'énoncé B signifie que A entraîne B et que B entraîne A. Comme exemple, citons le fait qu'une suite réelle est convergente dans \mathbb{R} est une caractérisation du fait que la suite soit de Cauchy. C'est dans MP1, page 95.
3. Un exemple familier justifiant la définition de l'implication matérielle est décrit dans MP1, pages 32, 33.
4. Les axiomes de Peano (MP1, pages 29, 30) permettent de construire l'ensemble des entiers naturels de manière axiomatique.
5. La barre de Peirce est définie dans MP1, page 41. En structure machine on parle de « NOR » pour désigner cette fonction booléenne.
6. Les deux méthodes de démonstration par récurrence sont décrites dans MP1, pages 96, ..., 100.
7. C'est dans MP1, en bas de la page 40.
8. Voir MP1, page 40.
9. Voir MP1, pages 107, ..., 112.