Faculté des Sciences
Dept. Mathématiques
Tlemcen

Epreuve finale de Topologie
(Durée 1h30)

Exercice1

On définit sur $C([0,1]\,,R)$, muni de la convergence uniforme ($\|u\| = \sup_{x\in[0,1]}|u(x)|$ pour $u \in C([0,1]\,,R)$), la forme linéaire

$$\Lambda(u) = \int_0^{\frac{1}{2}} u(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 u(t)dt \quad , \ u \in C([0,1]\,,R).$$

a) Montrer que l'application Λ est une forme linéaire continue et que $\|\Lambda\| \leq 1$.

b) Montrer que $\|\Lambda\| = 1$.

Indication : on pourra calculer pour $n \geq 3$, $u(u_n)$, avec u_n défini par

$$u_n = \begin{cases} 1 \text{ sur } \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right] \\ -1 \quad \text{ sur } \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right] \\ \text{affine et continue sur } \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Exercice2

Soit (X,d) un espace métrique et $(K_n)_{n\in N}$ une suite décroissante de fermés tous non vides tels que K_0 est compact.

1) Montrer que K_n est compact pour tout $n \in N$.

2) Montrer que $K = \cap_{n\in N} K_n \neq \phi$.

3) Soit U un ouvert contenant K. Montrer qu'il existe un $n \in N$ tel que $K_n \subset U$.

Exercice3

Soit $f : (X,d) \to (Y,D)$ une application entre deux espaces métriques.

1) Montrer que si f est uniformément continue l'image d'une suite de Cauchy de X par f est une suite Cauchy de Y.

2) On suppose que f est un homéomorphisme uniformément continu. Montrer que si Y est complet, X l'est aussi.

1 Correction

Exercice1

a) Λ est linéaire, en effet pour tous α, $\beta \in R$ et u, $v \in C([0,1]\,,R)$, nous avons

$$\Lambda(\alpha u + \beta v) = \int_0^{\frac{1}{2}} (\alpha u + \beta v)(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 (\alpha u + \beta v)(t)dt$$

$$\begin{aligned} &= \alpha \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (u)(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 (u)(t)dt \right) + \beta \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (v)(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 (v)(t)dt \right) \\ &= \alpha\Lambda(u) + \beta\Lambda(v). \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$|\Lambda(u)| = \left| \int_0^{\frac{1}{2}} (u)(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 (u)(t)dt \right| \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \|u\| \, dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \|u\| \, dt = \|u\| \, .$$

Ce qui montre que l'application linéaire Λ est continue et qu'en plus

$$\|\Lambda\| \leq 1.$$

b) Commençons d'abord par déterminer l'application affine continue qui est de la forme $g(t) = at + b$ avec a, $b \in R$ à déterminer.

Nous avons par la continuité de g : $\begin{cases} g\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) = 1 \\ g\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) = -1 \end{cases}$

ce qui donne $a = -n$ et $b = \frac{n}{2}$ i.e. $g(x) = -nt + \frac{n}{2}$.

Par ailleurs, pour $n \geq 3$,

$$\Lambda(u_n) = \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} u_n(t)dt + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} u_n(t)dt - \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} u_n(t)dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 u_n(t)dt \right)$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{2}{n} + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} \left(-nt + \frac{n}{2}\right) dt - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \left(-nt + \frac{n}{2}\right) dt \\ &= 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

D'où $\|\Lambda\| = \sup \left\{ \frac{|\Lambda(u)|}{\|u\|} : u \in C([0,1], R) - \{0\} \right\} \geq \sup |\Lambda(u_n)| = \sup \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \geq 3 \right\} = 1$.

Et par comparaison avec la question (a), on obtient

$$\|\Lambda\| = 1.$$

Exercice2

1) Nous savons que tout sous-ensemble fermé d'un compact est compact. Comme la suite $(K_n)_{n \in N}$ est une suite décroissante de fermés avec K_o compact il en résulte que tous les K_n sont des compacts.

2) Montrons que $K = \cap_{n \in N} K_n \neq \phi$.

On procède par absurde i.e. on suppose que $K = \phi$ ce qui donne par passage au complémentaire par rapport à K_o que

$$K_o = \cup_{n \in N} CK_n$$

et puique les CK_n forme un recouvrement d'ouverts pour K_o et que ce dernier est compact on peut en extraire un sous recouvrement fini i.e.

$$K_o = \cup_{i=1,\ldots,n} CK_i$$

ce qui donne

$$\phi = \cap_{i=1,\ldots,n} K_i = K_n \neq \phi$$

Contradiction et par suite $K \neq \phi$.

3) Soit U un ouvert contenant K. Montrons l'existence d'un $n \in N$ tel que $K_n \subset U$.

En effet supposons qu'aucun des K_n n'est contenu dans U alors pour tout $n \in N$, il existe $x_n \in K_n \cap CU$. Pour chaque $n \in N$, la suite $(x_{n+l})_{l \in N} \subset K_n$ et puisque ce dernier est compact alors elle admet une sous-suite convergente vers $x_o \in K_n$. Ce qui montre alors que $x_o \in \cap_{n \in N} K_n = K$. Par ailleurs la suite $(x_n)_{n \in N} \subset CU$ qui est fermé et par suite $x_o \in CU$ ce qui contredit le fait que $K \subset U$. Par conséquent il existe $n \in N$ tel que $K_n \subset U$.

Exercice3

1) Montrons que l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est une suite de Cauchy.

Soit $(x_n)_{n \in N}$ une suite de Cauchy de (X, d) i.e. telle que pour tout $\eta > 0$ il existe $n_o \in N$ telle que pour tous $m, n \geq n_0$ on a $d(x_n, x_m) < \eta$. Puisque f est uniformément continue alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tous x,$y \in X$ tels que $d(x, y) < \delta$ on a $D(f(x), f(y)) < \epsilon$. En prenant $\eta = \delta$, il existe alors $n_o \in N$ tels que pour tous $m, n \geq n_0$ on aura $D(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon$. Ce qui montre que $(f(x_n))_{n \in N}$ est une suite de Cauchy dans (Y, D).

2) Montrons que si Y est complet, X l'est aussi.

Soit $(x_n)_{n \in N} \subset X$ une suite de Cauchy, puisque f est uniforment continue et par la première question $(y_n = f(x_n))_{n \in N}$ est une suite de Cauchy dans (Y, D) qui est complet et $y_n = f(x_n) \to y \in Y$ et comme f est un homéomorphise $x_n = f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)) = x \in X$.