UABT
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques 25 /01/18
L2.MATH

Analyse III - **Epreuve finale** **(Sujet +corrigé)**

Exercice 01 : 04,5 pts

1. Développer en série entière autour de l'origine la fonction $f(x) = \frac{1+2x}{1+x+x^2}$.
   En déduire le développement de $g(x) = ln\sqrt{1+x+x^2}$. Préciser le rayon de convergence de la série obtenue.
2. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{g(x)}{\sqrt{x}} dx$ converge et donner sa valeur sous forme de série.

Exercice 02 : 07,5 pts

I. Pour tous $p > 0, \alpha > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, soit $\varphi(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{sinxt}{t^\alpha} dt$

1. Montrer que l'intégrale $\varphi(p)$ est convergente $\forall\, p > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $0 < \alpha < 2$.
2. Montrer que $\varphi(p)$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, $\forall\, a > 0$ en déduire la continuité de $\varphi(p)$ $\forall\, p > 0$.

II. On considère la fonction de la variable réelle x : $\psi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{sinxt}{t} dt$, $p > 0$.

1. Montrer que la fonction $\psi(x)$est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Calculer $\psi'(x)$,en déduire l'expression de $\psi(x)$sans le signe intégrale.
3. Trouver la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$

Exercice 03 : 08 pts

I. On considère la fonction f : ℝ → ℝ , impaire et de période P = π et telle que
$f(x) = \sin x \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

1) Dessiner le graphe de f (on prendra au moins $x \in \left[-{}^{3\pi}/_{2}, {}^{3\pi}/_{2}\right]$).

2) Calculer la série de Fourier associée à f et étudier sa convergence. Converge-t-elle uniformément sur ℝ ?

3) Calculer les sommes : $S_1 = \sum_{n\geq1} \frac{(-1)^n n sin2n}{4n^2-1}$, $S_2 = \sum_{n\geq1} \frac{(-1)^n(2n-1)}{16n^2-8n+3}$ et $S_3 = \sum_{n\geq1} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}$,

II. On cherche une solution particulière y =$y(x)$ de l'équation différentielle
$(E) : y" - y = f(x)$ telle que y est de classe C^2 sur ℝ et de période π .

1) Justifier que y est développable en série de Fourier de période π .

2) Soient $a_n(y) et\ b_n(y)$ les coefficients de Fourier de y et $a_n(y") et\ b_n(y")$ les coefficients de Fourier de $y"$.

   a) Vérifier que $b_n(y") = -4n^2 b_n(y) \forall n \geq 1$
   b) Montrer que si y est solution de (E) alors $a_n(y) = 0\ \forall n \geq 0$ et
   $$(1 + 4n^2)b_n(y) = -b_n(f)\ \ \forall n \geq 1$$

où $b_n(f)$ $sont\ les$ coefficients de Fourier de f. En déduire une solution particulière y de l'équation (E) sous forme de série de Fourier.

Exercice 01 : 04,5 pts

1. **03 pts**

- $f(x) = \frac{1+2x}{1+x+x^2} = \frac{(1+2x)(1-x)}{1-x^3} = (1+x-2x^2)\sum_{n\geq 0} x^{3n} \ avec \ |x| < 1 = R.$

$f(x) = \sum_{n\geq 0} x^{3n} + x^{3n+1} - 2x^{3n+2} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$: $\begin{cases} a_{3n} = 1 \\ a_{3n+1} = -1 \\ a_{3n+2} = -2 \end{cases}$ de rayon de convergence R = $limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

- $g(x) = ln\sqrt{1+x+x^2}$ $\quad g'(x) = \frac{1}{2} f(x)$ $\quad$ et $g(0) = 0$

D'où $g(x) = \frac{1}{2}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^x \sum_{n\geq 0} t^{3n} + t^{3n+1} - 2t^{3n+2} \ dt = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \frac{x^{3n+2}}{3n+2} - 2\frac{x^{3n+3}}{3n+3}$

de rayon de convergence est le même que celui de f ie R =1.

2. **01.5pts** $I = \int_0^1 \frac{g(x)}{\sqrt{x}} dx \ est \ défini \ donc \ converge$ car

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{ln\sqrt{1+x+x^2}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow x = 0 \ n'est \ pas \ un \ pt \ singulier$$

$$I = \int_0^1 \frac{g(x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n+\frac{1}{2}}}{3n+1} + \frac{x^{3n+\frac{3}{2}}}{3n+2} - 2\frac{x^{3n+\frac{5}{2}}}{3n+3} dx.$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} \left[\frac{x^{3n+\frac{3}{2}}}{(3n+1)\left(3n+\frac{3}{2}\right)} + \frac{x^{3n+\frac{5}{2}}}{(3n+2)\left(3n+\frac{5}{2}\right)} - 2\frac{x^{3n+\frac{7}{2}}}{(3n+3)\left(3n+\frac{7}{2}\right)} \right]_0^1.$$

$$I = \sum_{n\geq 0} \frac{2}{(3n+1)(6n+3)} + \frac{2}{(3n+2)(6n+5)} - \frac{4}{(3n+3)(6n+7)}.$$

Exercice 02 : 04 pts

$$Soient \ p > 0, \alpha > 0 \ et \ x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{sinxt}{t^\alpha} dt$$

1. **02 pts** $\varphi(p) = \int_0^{+\infty} f(p,t)dt$

$\lim_{t\to 0} f(p,t) = \lim_{t\to 0} \frac{x}{t^{\alpha-1}} = \infty \ si \ \boldsymbol{\alpha > 1} \Rightarrow t = 0 \ est \ un \ point \ singulier(si \ \alpha > 1).$

- $\varphi(p) = \underbrace{\int_0^1 f(p,t)\,dt}_{I_2' : 2^{ème} espèce \ si \ \alpha > 1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(p,t)\,dt}_{I_2'' : 1^{ère} espèce}$
- $\forall t > 0 \ f(p,t)$ est définie ,continue et telle que :
  $f(p,t) \sim \frac{x}{t^{\alpha-1}}, alors \ I'_2 \begin{cases} converge \ si \ \alpha - 1 < 1 : \alpha < 2 \\ diverge \quad \alpha \geq 2 \end{cases}$
- $\forall p > 0, \alpha > 0, x \in \mathbb{R} \ et \ \forall t \geq 1 \ \lim_{t\to+\infty} t^2|f(p,t)| = 0$
  $alors \ I_2''$ converge $absolument \ donc$ converge $simplement \forall p > 0, \alpha > 0 \ et \ x \in \mathbb{R}$
  $Conclusion$: L'intégrale $\varphi(p)$ converge $\forall p > 0, x \in \mathbb{R}$ et $0 < \alpha < 2$.

2. **02,5 pts** Dans le cas : $0 < \alpha < 2,$

- $\forall p \geq a > 0 \ et \ \forall t \geq 1 \quad |f(p,t)| \leq e^{-at} = g(t)$

$\lim_{t\to+\infty} t^2 g(t) = 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ converge

Alors I_2'' converge normalement $\forall p \geq a > 0$

- $\forall p \geq a > 0, \forall t : 0 < t < 1 \quad |f(p,t)| \leq \frac{1}{t^{\alpha-1}} = h(t)$

  $0 < \alpha < 2 \Rightarrow \int_0^1 h(t)\, dt$ converge

Alors I_2'' converge normalement sur $[a, +\infty[, \forall\, a > 0$.

Conclusion : L'intégrale $\varphi(p)$ converge normalement donc uniformément (par rapport à p) sur $[a, +\infty[, \forall\, a > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ et $0 < \alpha < 2$.

Comme $f(p,t)$ est continue sur $[a, +\infty[\times]0, +\infty[$ *et l'*intégrale *converge uniformément* alors $\varphi(p)$ est continue sur $[a, +\infty[\ \forall\, a > 0$,ainsi pour tout $p \in]0, +\infty[$

II. $\psi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{\sin xt}{t} dt \ , \ p > 0$

1. **02 pts**

   $i)\ \exists x_0 = 0 \in \mathbb{R} : \psi(0) = 0$ converge

   $ii)\ f(x,t) = e^{-pt} \frac{\sin xt}{t}$ et $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = e^{-pt} \cos xt$ sont continues sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$

   $iii) \forall x \in \mathbb{R} \ \left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right| \leq e^{-pt} = g(t)$.

$\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 g(t) = 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} g(t)\, dt$ converge ,alors $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : $\psi(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\ \psi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt$.

2. **01 pt** $\psi'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos xt dt = Re \int_0^{+\infty} e^{-pt+ixt}\, dt = Re \left[\frac{e^{-pt+ixt}}{-p+ix}\right]_0^{+\infty} = Re\left(\frac{1}{p-ix}\right) = \frac{p}{p^2+x^2}$

   $\psi(x) - \underbrace{\psi(0)}_{0} = \int_0^x \psi'(t) dt = \int_0^x \frac{p}{p^2+t^2} dt = \int_0^x \frac{\frac{dt}{p}}{1+\left(\frac{t}{p}\right)^2} = \arctan\left(\frac{x}{p}\right)$.

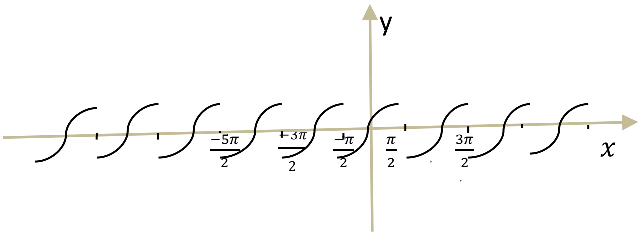
3. **0.5pt** Pour $\alpha = 1$ et $x = 1$, $\psi(1) = \arctan\left(\frac{1}{p}\right) = \varphi(p)$, en utilisant la continuité de φ on a : $\lim\limits_{p \to 0^+} \varphi(p) = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{p \to 0} e^{-pt} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$

<u>Exercice 03 :</u> 08pts

I.

f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, impaire et de période P = π et telle que $f(x) = \sin x$

1) **<u>01pt</u>** le graphe de f :



2) **<u>02,5 pts</u>**$\frac{\pi}{2}$

- f est impaire alors $\forall n \geq 0\ \ a_n = 0 \qquad \forall n \geq 1\ b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2nx\, dx$.

  - $\forall n \geq 1\ b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(1-2n)x + \cos(1+2n)x\, dx\right] =$

    $= \frac{2}{\pi}\left[\left[\frac{\sin(1-2n)x}{(1-2n)} + \frac{\sin(1+2n)x}{(2n+1)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(1-2n)\frac{\pi}{2}}{(1-2n)} + \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)}\right] = \frac{8n(-1)^n}{\pi(4n^2-1)}$.

  - $S(f(x)) = \sum_{n\geq 1} \frac{8n(-1)^n}{\pi(4n^2-1)} \sin 2nx$

- Comme le montre le graphe , la fonction f est impaire et de période π , continue partout sauf aux points $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
  Il est évident que les conditions de Jordan sont vérifiées à savoir
  $$\begin{cases} i)\ f\ est\ bornée\ \ dans\ \mathbb{R} : \forall x \in\ \mathbb{R}\ \ |f(x)| \leq 1 \\ ii) f est\ continue\ et\ croissante\ sur\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\ , \quad alors\ : \end{cases}$$
- $S(f(x)) = f(x) \quad \forall x \neq x_k$
  $S(f(x_k)) = \frac{f(x_k{}^+)+f(x_k{}^-)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 = f(x_k)$
  Ainsi $S(f(x)) = f(x)\ \forall x \in\ \mathbb{R}$

3)**01,75pts** Calcul des sommes : $S_1 = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n sin2n}{4n^2-1}$, $S_2 = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n(2n-1)}{16n^2-16n+3}$ et $S_3 = \sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}$,

- ✓ $S(f(1)) = \frac{8}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}n sin2n}{4n^2-1} = f(1) = sin1 \Rightarrow S_1 = -\frac{\pi\ sin1}{8}$
- ✓ $S\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{8}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{4(-1)^n n\left(sin\frac{n\pi}{2}\right)}{4n^2-1} = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n(2n-1)}{16n^2-16n+3} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sin\frac{\pi}{4}$
  $S_2 = -\frac{\pi\sqrt{2}}{16}$
- Application de l'égalité de Parseval :$\sum_{n\geq 1\geq} b_n^2 = \frac{64}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos2x)\,dx$ = 1;alors $S_3 = \frac{\pi^2}{64}$

II. **<u>03pts</u>**

Soit $y = y(x)$ une solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y" - y = f(x)$

1) **<u>0.5pt</u>** Si y est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et de période $2\ \pi\ alors$ les conditions de Dirichlet sont satisfaits (y et y'sont continues donc continues par morceaux sur $[0,2\pi]$) donc elle est développable en série de Fourier.

2) **<u>01,5pts</u>** Soient $a_n(y) et\ b_n(y)\ les$ coefficients de Fourier de y et $a_n(y") et\ b_n(y")\ les$ coefficients de Fourier de $y"$.

y est de classe C^2 et $2\pi -$ périodique alors <u>$y(0)=y(2\pi)$, $y'(0)=y'(2\pi)$ et $y''(0)=y"(2\pi)$</u>

- $$b_n(y") = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} y"(x) sin2nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\underbrace{[y'(x)sin2nx]_0^{\pi}}_{0} - 2n\int_0^{\pi} y'(x) cos2nx\,dx\right].$$

$$= \frac{-4n}{\pi}\left[\underbrace{[y(x)cos2nx]_0^{\pi}}_{0} + 2n\int_0^{\pi} y(x) sin2nx\,dx\right] = -4n^2 b_n(y)\ \forall n \geq 1.$$

2) **<u>01pt</u>** Comme f est impaire ;il est évident de chercher une solution y de (E) qui soit impaire car : $y\ est$ impaire $\Rightarrow y" impaire \Rightarrow y" - y\ impaire$:ainsi $a_n(y) = 0$
   et $b_n(y" - y) = b_n(y") - b_n(y) = -(1+4n^2)b_n(y) = b_n(f) \quad \forall n \geq 1$

D'où$b_n(y) = \frac{-b_n(f)}{(1+4n^2)} \quad \forall n \geq 1$ Ainsi : $y(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{8n(-1)^{n+1}}{\pi(16n^4-1)} sin2nx$