Faculté des Sciences
Département de Mathématiques 2017/2018

Epreuve finale d'analyse numérique 1 (corrigé)

Exercice 1
Pour approcher l'intégrale $I(f) = \int_0^h f(x)dx$, on considère la méthode d'intégration

$$J(f) = h\left[af(0) + bf(\frac{2h}{3})\right], \text{avec } h > 0 \text{ donné.}$$

Déterminer a et b pour que la méthode J soit exacte pour les polynômes de degré le plus élevé possible. Quel est le degré de précision de la formule?
Corrigé
Déterminons a et b tels que $J(f) = I(f)$ pour $f = x^k, k = 0, 1$
$k = 0 \qquad h(a + b) = h \Leftrightarrow a + b = 1$
$k = 1 \qquad b\dfrac{2h^2}{3} = \dfrac{h^2}{2} \Leftrightarrow b = \dfrac{3}{4}$
d'où $\qquad J(f) = h\left[\dfrac{1}{4}f(0) + \dfrac{3}{4}f(\dfrac{2h}{3})\right]$
pour $k = 2 \qquad J(x^2) = \dfrac{h^3}{3} = I(x^2)$
pour $k = 3 \qquad J(x^3) = \dfrac{2h^4}{9} \neq \dfrac{h^4}{4} = I(x^3)$
Le degré de précision de la formule de quadrature $J(f)$ est égal à 2.
Exercice 2
1. Quel est le polynôme de degré 1, de meilleure approximation au sens des moindres carrés discrètes pour les valeurs

$$(1, 0), (2, 6), (3, 14), (4, 24)$$

2. Déterminer le polynôme de meilleur approximation en moyenne quadratique de la fonction $f(x) = \sin(x)$ dans le sous espace engendré par p_0, p_1 et p_2 sur l'intervalle $[-1, 1]$ relativement à la fonction poids $\omega(x) = 1$, avec

$$p_0(x) = 1, p_1(x) = x \text{ et } p_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

Corrigé
1. On pose $p(x) = a_0 + a_1x$ et $s(a_0, a_1) = \sum\limits_{i=1}^{4}(y_i - a_0 - a_1x_i)^2$
On cherche a_0 et a_1 tels que $s(a_0, a_1)$ soit minimale, les équations normales s'écrivent:
$\dfrac{\partial s}{\partial a_0}(a_0, a_1) = \dfrac{\partial s}{\partial a_1}(a_0, a_1) = 0$
Ce qui est équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{c} 4a_0 + a_1\sum\limits_{i=1}^{4}x_i = \sum\limits_{i=1}^{4}y_i \\ a_0\sum\limits_{i=1}^{4}x_i + a_1\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{4}x_iy_i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 4a_0 + 10a_1 = 44 \\ 10a_0 + 30a_1 = 150 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2a_0 + 5a_1 = 22 \\ a_0 + 3a_1 = 15 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -9 \\ a_1 = 8 \end{cases}$
D'où

$$p(x) = -9 + 8x$$

2. Vérifions que les polynômes p_0, p_1 et p_2 sont orthogonaux sur l'intervalle $[-1, 1]$ par rapport à la fonction poids $\omega(x) = 1$,
$\int_{-1}^{1} p_0(x)p_1(x)dx = \int_{-1}^{1} xdx = 0$ comme intégrale d'une fonction impaire sur $[-1, 1]$
$\int_{-1}^{1} p_0(x)p_2(x)dx = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx = 0$
$\int_{-1}^{1} p_1(x)p_2(x)dx = \int_{-1}^{1} x \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx = 0$ comme intégrale d'une fonction impaire sur $[-1, 1]$
De plus,
$\int_{-1}^{1} p_0^2(x)dx = \int_{-1}^{1} dx = 2 = \alpha_0$
$\int_{-1}^{1} p_1^2(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3} = \alpha_1$
$\int_{-1}^{1} p_2^2(x)dx = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{8}{45} = \alpha_2$
Le polynôme cherché s'écrit: $p(x) = c_0p_0(x) + c_1p_1(x) + c_2p_2(x)$
avec $\begin{cases} c_0 = \frac{1}{\alpha_0} \int_{-1}^{1} p_0(x)\sin(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \sin(x)dx = 0 \\ c_1 = \frac{1}{\alpha_1} \int_{-1}^{1} p_1(x)\sin(x)dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} x\sin(x)dx = 3(\sin 1 - \cos 1) \\ c_2 = \frac{1}{\alpha_2} \int_{-1}^{1} p_2(x)\sin(x)dx = \frac{45}{8} \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\sin(x)dx = 0 \end{cases}$
Conclusion $p(x) = 3(\sin 1 - \cos 1)\, x$

Exercice 3

Soit $I = [0, 1]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Considérons les points d'appui $x_0 = \frac{1}{3}$ et $x_1 = \frac{2}{3}$.
1) En utilisant le polynôme d'interpolation de f en $x_0$et $x_1$trouver la formule de quadrature relative aux points d'appui considérés pour le calcul de $\int_0^1 f(x)dx$.
2) En considérant $f(x) = \frac{1}{1+x}$, en déduire une valeur approchée de $\ln 2$.
3) A l'aide d'un changement de variable affine, étendre cette formule de quadrature pour l'intégrale suivante $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$.
4) On considère la subdivision de l'intervalle $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, avec $x_i = a + ih$. En déduire la formule composite pour le calcul de $\int_a^b f(x)dx$.

Corrigé

1) $p(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) = (2 - 3x) f(x_0) + (3x - 1) f(x_1)$
On note $Q(f)$ la formule de quadrature cherchée $Q(f) = f(x_0) \int_0^1 (2 - 3x)\, dx + f(x_1) \int_0^1 (3x - 1)\, dx$ $= \frac{1}{2}\left(f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3})\right)$
2) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$

$\ln 2 \approx Q(\frac{1}{1+x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+\frac{2}{3}}\right) = \frac{27}{40}$

3)

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx &= (x_{i+1}-x_i)\int_0^1 f((x_{i+1}-x_i)\,x + x_i)dx \\
&\approx \frac{(x_{i+1}-x_i)}{2}\left[f((x_{i+1}-x_i)\,\frac{1}{3}+x_i) + f((x_{i+1}-x_i)\,\frac{2}{3}+x_i)\right]
\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \\
&\approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(x_{i+1}-x_i)}{2}\left[f((x_{i+1}-x_i)\,\frac{1}{3}+x_i) + f((x_{i+1}-x_i)\,\frac{2}{3}+x_i)\right] \\
&\approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_i+\frac{h}{3}) + f(x_i+\frac{2h}{3})\right] \\
&\approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(a+\left(i+\frac{1}{3}\right)h) + f(a+\left(i+\frac{2}{3}\right)h)\right]
\end{aligned}$$

Exercice 4

1. On suppose que $f \in C^3[a,b]$ et que $x_0, x_0+h, x_0+3h \in [a,b]$.Obtenir la formule d'approximation de $f'(x_0)$ utilisant **le polynôme d'interpolation** passant par $(x_0, f(x_0))$, $(x_0+h, f(x_0+h))$, $(x_0+3h, f(x_0+3h))$, estimer l'erreur de la formule et en déduire l'ordre de la formule.

2. Soit $f(x) = xe^x$ et $x_0 = 0, x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

A partir de la **formule de Taylor** obtenir les formules avant, centrée et arrière pour le calcul de $f'(x)$ et donner l'ordre de chaque formule. Evaluer $f'(1)$ à l'aide de ces formules.

Corrigé

1. $p_2(x) = l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_0+h) + l_2(x)f(x_0+3h)$ où

$l_0(x) = \frac{1}{3h^2}(x-x_0-h)(x-x_0-3h) \Rightarrow l_0'(x) = \frac{2}{3h^2}(x-x_0-2h)$

$l_1(x) = -\frac{1}{2h^2}(x-x_0)(x-x_0-3h) \Rightarrow l_1'(x) = -\frac{1}{2h^2}(2x-2x_0-3h)$

$l_2(x) = \frac{1}{6h^2}(x-x_0)(x-x_0-h) \Rightarrow l_2'(x) = \frac{1}{6h^2}(2x-2x_0-h)$

comme $f(x) = p_2(x) + \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0-3h), \xi(x) \in]x_0, x_0+3h[$

alors

$$\begin{aligned}
f'(x) &= p_2'(x) + \left[\frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}\right]'(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0-3h) + \\
&\frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}\left[(x-x_0)(x-x_0-h) + (x-x_0)(x-x_0-3h) + (x-x_0-h)(x-x_0-3h)\right]
\end{aligned}$$

Pour $x = x_0$
$f'(x_0) = p_2'(x_0) + \dfrac{f^{(3)}(\xi(x_0))}{2}h^2$
avec $p_2'(x_0) = \dfrac{-4}{3h}f(x_0) + \dfrac{3}{2h}f(x_0+h) - \dfrac{1}{6h}f(x_0+3h) = \dfrac{1}{6h}\left[-8f(x_0) + 9f(x_0+h) - f(x_0+3h)\right]$
Il en résulte l'approximation

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{6h}\left[-8f(x_0) + 9f(x_0+h) - f(x_0+3h)\right]$$

or $|f'(x_0) - p_2'(x_0)| \leq \dfrac{M}{2}h^2$ avec $M = \sup\limits_{x \in [x_0, x_0+3h]} \left|f^{(3)}(x)\right|$
donc l'ordre de la formule est 2.
2.

- Formule avant.

  En supposant que $f \in C^2\left([x_1 - h, x_1]\right)$ la formule de Taylor

  $$f(x_1+h) = f(x_1) + hf'(x_1) + \frac{h^2}{2}f''(\xi_1), \xi_1 \in]x_1, x_1+h[$$

  donne

  $$f'(x_1) = \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi_1)$$

  d'où l'approximation

  $$f'(x_1) \approx \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}$$

  Comme, en posant $M_1 = \max\limits_{x \in [x_1, x_1+h]} |f''(x)|$ on a

  $$\left|f'(x_1) - \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}\right| \leq \frac{M_1}{2}h$$

  alors cette formule est d'ordre 1.
  $f'(1) \approx \dfrac{f(2) - f(1)}{1} = 2e^2 - e$

- Formule arrière.

  En supposant que $f \in C^2\left([x_1 - h, x_1]\right)$,la formule de Taylor

  $$f(x_1-h) = f(x_1) - hf'(x_1) + \frac{h^2}{2}f''(\xi_2), \xi_2 \in]x_1 - h, x_1[$$

  donne

  $$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_1-h)}{h} + \frac{h}{2}f''(\xi_2)$$

  d'où l'approximation

  $$f'(x_1) \approx \frac{f(x_1) - f(x_1-h)}{h}$$

Comme avec $M_2 = \max_{x \in [x_1 - h, x_1]} |f''(x)|$ on obtient

$$\left| f'(x_1) - \frac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{h} \right| \leq \frac{M_2}{2} h$$

alors cette formule est d'ordre 1.
$f'(1) \approx \dfrac{f(1) - f(0)}{1} = e$

- Formule centrée.

  En supposant que $f \in C^3 [x_0, x_2]$

$$f(x_1 + h) = f(x_1) + hf'(x_1) + \frac{h^2}{2} f''(x_1) + \frac{h^3}{3!} f'''(\xi_3), \xi_3 \in]x_1, x_1 + h[$$

et

$$f(x_1 - h) = f(x_1) - hf'(x_1) + \frac{h^2}{2} f''(x_1) - \frac{h^3}{3!} f'''(\xi_4), \xi_4 \in]x_1 - h, x_1[$$

en soustrayant membre à membre on a:

$$f(x_1 + h) - f(x - h) = 2hf'(x_1) + \frac{h^3}{3!} [f'''(\xi_3) + f'''(\xi_4)]$$

Sachant que f''' est continue sur $[x_1 - h, x_1 + h]$ alors le théorème des valeurs intermédiares assure l'existence d'un $\xi \in]x_1 - h, x_1 + h[$ tel que $\dfrac{f'''(\xi_3) + f'''(\xi_4)}{2} = f'''(\xi)$ d'où

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1 + h) - f(x - h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$

Il en résulte l'approximation centrée suivante:

$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_1 + h) - f(x - h)}{2h}$$

C'est une formule d'ordre 2 car:

$$\left| f'(x_1) - \frac{f(x_1 + h) - f(x - h)}{2h} \right| \leq \frac{M_3}{6} h^2, \text{ où } M_3 = \max_{x \in [x_1 - h, x_1 + h]} |f'''(x)|$$

$f'(1) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = e^2$