

Epreuve finale de Algèbre 3

durée : 2 heures

Exercice n° ①

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- 1°/ Déterminer $D = \{a \in \mathbb{R} / A \text{ n'est pas diagonalisable}\}$
- 2°/ Pour $a \in D$ diagonaliser A en précisant la matrice de passage
- 3°/ Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; résoudre $\frac{dX}{dt} = BX$

Exercice n° ②

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- 1°/ Montrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice A' diagonale et une matrice P inversible telles que $A' = P^{-1}AP$
- 2°/ En déduire le polynôme minimal $m_A(x)$ de A
- 3°/ A est elle inversible? si oui déterminer A^{-1} en utilisant 2°/
- 4°/ Calculer $-A^6 + 10A^5 - 32A^4 + 32A^3 + A$.

Exercice n° ③

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. montrer que si 0 est une valeur propre de f^n ($f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$) alors 0 est une valeur propre de f .

Exercice n° ④

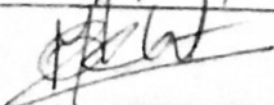
Soit E un K -espace vectoriel, f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \text{Id}$.
montrer que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id})$.

Exercice n° ⑤

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E .

- 1°/ Montrer que si f est diagonalisable, il existe une base de E formée par les vecteurs propres de f .
- 2°/ Montrer que si λ est une valeur propre de f alors $\det(f - \lambda \text{Id}) = 0$

Barème : Ex1: 7pts; Ex2: 7pts; Ex3: 2pts; Ex4: 1,5pts; Ex5: 2,5pts.

Bon Courage 

Compte rendu de l'épreuve finale
du module Algèbre 3 du 23/01/2018

Exercice 1

$f: P_A(x) = x(x-1)(x-a)$ (0.25)

1^{er} cas si $a \neq 0$ et $a \neq 1$ A aura 3 valeurs propres distinctes et donc elle est diagonalisable (0.25)

2^{ème} cas si $a = 0$ $P_A(x) = x^2(x-1)$

A est diagonalisable $\Leftrightarrow m_A(x) = x(x-1) \Leftrightarrow m_A(A) = 0 \Leftrightarrow A(A-I) = 0$

$A(A-I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (0.5)

$\Rightarrow m_A(x)$ n'a pas des racines distinctes $\Rightarrow A$ n'est pas diagonalisable

3^{ème} cas si $a = 1$ même raisonnement, A n'est pas diagonalisable (0.5)

Conclusion: $D = \{0, 1\}$ (Remarque on peut raisonner avec les dimensions) (0.5)

2^o/ si $a = 0$ $P_A(x) = x^2(x-1) \Rightarrow P_A(x)$ est scindé \Rightarrow il existe

$\{v_1, v_2, v_3\}$ base de \mathbb{R}^3 $f(v_i) = \begin{matrix} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \\ v_1 \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v_i \end{matrix}$ avec $A = M(f)_{e_i}$
où e_i est la base canonique de \mathbb{R}^3 et f endomorphisme de \mathbb{R}^3

diagonalisation de v_1

① $f(v_1) = 0 \Rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ le système est compatible on pose $z = \alpha$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2\alpha \\ x = \alpha \end{cases} \Rightarrow x = \alpha \text{ et } y = 0$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ solution de ① $\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on prend $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on remarque (0.5)

que le sous-espace des solutions de l'équation ① est de dimension 1 (diagonalisation de v_2)

$f(v_2) = b v_2$, (*) nous interdit de prendre $b = 0$, prenons alors $b = 1$

ce qui nous donne l'équation $f(v_2) = v_2$ ②

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

le système est alors compatible, on pose $z = \alpha \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2\alpha + 1 \\ x = \alpha \end{cases}$

prenez $\alpha = 0$ nous aurons $x = 0$ $y = 1$ $z = 0$ et donc on peut prendre $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (0.5)

détermination de v_3

$f(v_3) = c v_1 + d v_2 + v_3$ pour le moment on peut prendre $c = d = 0$,

ce qui nous donne l'équation $f(v_3) - v_3 = 0$ (2)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ le système est compatible}$$

$$\text{on pose } z = \alpha \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4\alpha \\ x - y = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow x = 3\alpha \text{ et } y = \alpha$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ solutions de (2)} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ on peut prendre } v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (0.5)}$$

$$\text{Conclusion } A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } A' = P^{-1} A P \text{ (0.5)}$$

si $a = 1$ $P_A(x) = x(x-1)^2$ en utilisant le même raisonnement

$$\text{on trouve } A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A' = P^{-1} A P \text{ (0.5)}$$

2) Nous remarquons que $B = A$ avec $a = 0$, nous allons utiliser alors les résultats précédents

$$B \text{ est trigonalisable } B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Résolvons le système différentiel $\frac{dx'}{dt} = A'x'$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{dx'}{dt} \\ \frac{dy'}{dt} \\ \frac{dz'}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx'}{dt} = y' \\ \frac{dy'}{dt} = 0 \Rightarrow y' = c_2 \\ \frac{dz'}{dt} = z' \Rightarrow z' = c_3 e^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dx'}{dt} = c_2 \Rightarrow x' = c_2 t + c_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 t + c_1 \\ c_2 \\ c_3 e^t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = c_2 t + 3c_3 e^t + c_1; y = c_3 e^t + c_2, z = c_2 t + 2c_3 e^t + c_1$$

Exercice 4

$$P_A(x) = -(x-2)(x-4)^2 \Rightarrow x_1 = 2 (1) \text{ et } x_2 = 4 (2)$$

$$E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \delta = -1 \neq 0 \text{ le système est compatible}$$

$$\text{On pose } y = \alpha \text{ et } z = \beta \Rightarrow x = -\beta$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{v_2, v_3\}$ est une famille génératrice de E_4 , comme elle est l.b.c. (Th B) elle est donc une base de E_4 et par conséquent $\dim E_4 = 2 = \text{mul}(4)$.
 $\Rightarrow A$ est diagonalisable.

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \Delta =$$

le système est compatible, on pose $z = \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ 2x + 2y = -2\alpha \end{cases}$

$$\Rightarrow y = -2\alpha; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A' = P^{-1} A P$$

2°/ A est diagonalisable $\Rightarrow m_A(x)$ a des racines distinctes

$\Rightarrow m_A(x) = (x-2)(x-4)$ (0,5) (0,5)

3°/ $P_A(x) = \det(A - xI) = -(x-2)(x-4)^2$

$\Rightarrow \det A = P_A(0) = 32 \neq 0 \Rightarrow A$ inversible (0,5)

$m_A(x)$ est un polynôme annulateur de A $\Rightarrow m_A(A) = 0$

$m_A(x) = (x-2)(x-4) = x^2 - 6x + 8 \Rightarrow A^2 - 6A + 8I = 0$

$\Rightarrow A(A-6I) = -8I \Rightarrow A \frac{(A-6I)}{-8} = I \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{8}(A-6I)$ (0,5)

$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ (0,5)

4°/ $P_A(x) = -(x-2)(x-4)^2 = -(x^3 - 10x^2 + 32x - 32)$

faisons la division euclidienne suivante

$$\begin{array}{r|l} -x^6 + 10x^5 - 32x^4 + 32x^3 + x & x^3 - 10x^2 + 32x - 32 \\ x^6 - 10x^5 + 32x^4 - 32x^3 & \hline \hline & -x^3 \end{array} \quad (1)$$

$\Rightarrow (-x^6 + 10x^5 - 32x^4 + 32x^3 + x) = -P_A(x) \cdot (-x^3) + x$ (0,5)

$\Rightarrow -A^6 + 10A^5 - 32A^4 + 32A^3 + A = -P_A(A) \cdot (-A^3) + A = 0 + A = A$ (0,5)

exercice 2°(3)

0 est une valeur propre de $f^n \Rightarrow \exists x \in E (x \neq 0) / f^n(x) = 0 \cdot x \Rightarrow \exists x \in E (x \neq 0) / f^n(x) = 0$

(1) $\Rightarrow \text{Ker } f^n \neq \{0\} \xrightarrow{(1)} \text{Ker } f \neq \{0\} \Rightarrow \exists x \in E (x \neq 0) / f(x) = 0 = 0 \cdot x \Rightarrow 0$ val propre de f

Montrons l'implication (1) ou bien $\text{Ker } f = \{0\} \Rightarrow \text{Ker } f^n = \{0\}$

(1) $x \in \text{Ker } f^n \Rightarrow f^n(x) = 0 \Rightarrow f(f^{n-1}(x)) = 0 \Rightarrow f^{n-1}(x) \in \text{Ker } f \xrightarrow{\text{Ker } f = \{0\}} f^{n-1}(x) = 0$
 $\Rightarrow f(f^{n-2}(x)) = 0 \Rightarrow f^{n-2}(x) = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{Ker } f^n = \{0\} \cdot \square \quad \square \quad \square$

exercice 2°(4) $f^3 = \text{Id} \Rightarrow f^3 - \text{Id} = 0 \Rightarrow Q(x) = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ est un polynôme annulateur de f qui se présente comme produit de 2 polynômes premiers entre eux, en utilisant le lemme fondamental nous avons

$E = \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id})$ (0,5) (0,5)

exercice 2°(5) : voir cons (1,5) + (0,1)