Faculté des Sciences
Dept Mathématiques
Tlemcen A.U. 2017-18

Contrôle continue de Topologie
(Durée 1h30)

Exercice1

Soit (X, d) un espace métrique, A et B deux sous-ensembles de X.

a) Montrer que

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \ \text{ et } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

b) On note $u(A) = \overset{o}{\overline{A}}$ et $v(A) = \overline{\overset{o}{A}}$.

Calculer $u(A)$ et $v(A)$ pour $X = R$ (muni de la distance usuel) $A =]0, 1]$ et $A = Q$.

Exercice2

Soit $E = C^1([0, R], R)$ l'espace des fonctions de classe C^1 définies sur $[0, 1]$ et à valeurs dans R.On pose pour $f \in E$,

$$\|f\|_0 = \int_0^1 |f(x)|\, dx \text{ et } \|f\|_1 = |f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|\, dx$$

1) Montrer que $\|.\|_o$ et $\|.\|_1$ sont deux normes sur E.

2) Montrer que

$$\|.\|_o \leq \|.\|_1$$

(On pourra écrire que $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$)

Exercice 3

On considère $E = C([0, 1], R)$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ et à valeurs dans R. On définit l'application $u : E \to R$, définie par $u(f) = f(1)$.

On munit E de la norme $\|f\|_o = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

a) Montrer que l'application u est linéaire et continue.

On munit maintenant E de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$.

b) Montrer que u n'est pas continue sur E dans R (on pourra utiliser la suite f_n définie par $f_n(x) = \sqrt{n}x^n$)

Corrections

Exercice1 (6 points)

a) Montrons que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Nous avons:

$A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ ce qui donne $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$ d'où $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

De même, puisque: $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$, on déduit que: $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Comme $\overline{A} \cup \overline{B}$ est fermé et $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé contenant $A \cup B$, alors $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Par ailleurs $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ ce qui donne: $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ et par conséquent $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

b) $u(]0,1]) = \overset{o}{\overline{]0,1]}} = \overset{o}{[0,1]} =]0,1[$

$v(]0,1]) = \overline{\overset{o}{]0,1]}} = \overline{]0,1[} = [0,1]$.

De même

$u(Q) = \overset{o}{\overline{Q}} = \overset{o}{R} = R.$

et

$v(Q) = \overline{\overset{o}{Q}} = \overline{\phi} = \phi.$

Exercice2 (7 points)

1) Montrons que $\|.\|_o$ et $\|.\|_1$ sont deux normes sur E.

-$\|f\|_o = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 |f(x)|\,dx = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0\ \forall x \in [0,1]$ (Puisque f et la valeur absolue sont des fonctions continues); ce qui est équivalent à $f - 0$.

-$\forall \lambda \in R$ et $\forall f \in E$, $\|\lambda f\|_o = \int_0^1 |\lambda f(x)|\,dx = |\lambda| \int_0^1 |f(x)|\,dx = |\lambda|\,\|f\|_o$.

et

-$\forall f, g \in E$, $\|f+g\|_o = \int_0^1 |f(x)+g(x)|\,dx \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 |g(x)|\,dx = \|f\|_o + \|g\|_o$.

De même

-$\|f\|_1 = |f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|\,dx = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ et $f'(x) = 0,\ \forall x \in [0,1] \Leftrightarrow f = 0$.

-$\forall \lambda \in R, \forall f \in E$, $\|\lambda f\|_1 = |\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(x)|\,dx = |\lambda| \left(|f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|\,dx\right) = |\lambda|\,\|f\|_1$.

-$\forall f, g \in E$, $\|f+g\|_1 = |f(0)+g(0)| + \int_0^1 |f'(x)+g'(x)|\,dx$
$\leq |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'(x)|\,dx + \int_0^1 |g'(x)|\,dx = \|f\|_1 + \|g\|_1$.

Ce qui montre que $\|.\|_o$ et $\|.\|_1$ sont deux normes sur E.

2) Maintenant on va montrer que $\|.\|_o \leq \|.\|_1$.

En effet $\forall f \in E$, $\|f\|_o = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ et sachant que l'on peut écrire que $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$, on obtient:

$\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\,dt \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|\,dx = \|f\|_1$.

D'où $\|f\|_o = \int_0^1 |f(x)|\,dx \leq \int_0^1 \|f\|_1\,dx = \|f\|_1 \int_0^1 dx = \|f\|_1$.

Exercice3 (7 points)

1) u est linéaire et continue.

En effet pour tous f, $g \in E$ et λ, $\mu \in R$, on a:

$u(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(1) = (\lambda f)(1) + (\mu g)(1) = \lambda f(1) + \mu g(1)$
$= \lambda u(f) + \mu u(g)$.

Ce qui montre que u est une application R-linéaire sur E .

Pour montrer que u est continue il suffit de montrer par exemple l'existence d'une constante M telle que

$|u(f)| \leq M \|f\|_o$.

En effet, $|u(f)| = |f(1)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = \|f\|_o$. La constante cherchée $M = 1$ et u est continue sur l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|_o)$.

2) Montrons à présent que u n'est pas continue sur l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|_1)$. Pour cela considérons la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par $f_n(x) = \sqrt{n}x^n$. Nous avons $\|f_n\|_1 = \int_0^1 \sqrt{n}x^n dx = \left[\frac{\sqrt{n}}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \to 0$ quand $n \to +\infty$ i.e. $\lim_{n \to +\infty} f_n = 0$ pour la norme $\|.\|_1$. Mais $u(f_n) = f_n(1) = \sqrt{n} \to +\infty \neq u(0) = 0$. L'application n'est pas continue sur $(E, \|.\|_1)$