Faculté des Sciences 2017/2018
Département de Mathématiques

Contrôle continu d'analyse numérique 1 (corrigé)

Durée: 90 mn

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé
Veillez à justifier soigneusement vos réponses
Il sera tenu compte dans la notation de la présentation de la copie d'examen

Exercice 1

1- Dans une arithmétique flottante à 3 chiffres sans arrondi, évaluer le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(1.47, 0.2)$ et $(2.62, 0.5)$ au point 1.5.
2- Pour quelle valeur de x risque t-on une erreur d'annulation dans le calcul de l'expression suivante. Dans ce cas proposer une autre façon de l'évaluer.

$$y = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}$$

Solution

1-$p_1(x) = y_0 \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$
$fl(x) = fl(1.5) = 0.150 \times 10$
$fl(x_0) = fl(1.47) = 0.147 \times 10$
$fl(x_1) = fl(2.62) = 0.262 \times 10$
$fl(x - x_1) = fl(0.150 \times 10 - 0.262 \times 10) = fl(-0.112 \times 10) = -0.112 \times 10$
$fl(x_0 - x_1) = fl(0.147 \times 10 - 0.262 \times 10) = fl(-0.115 \times 10) = -0.115 \times 10$
$fl(\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}) = fl(\dfrac{0.112 \times 10}{0.115 \times 10}) = fl(\dfrac{0.112}{0.115}) = fl(0.973) = 0.973$
$fl(x - x_0) = fl(0.150 \times 10 - 0.147 \times 10) = fl(0.003 \times 10) = 0.300 \times 10^{-1}$
$fl(x_1 - x_0) = -fl(x_0 - x_1) = 0.115 \times 10$
$fl(\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}) = fl(\dfrac{0.300 \times 10^{-1}}{0.115 \times 10}) = fl(\dfrac{0.300}{0.115} \times 10^{-2}) = fl(2.60 \times 10^{-2}) = 0.260 \times 10^{-1}$.
$p_1(x) = fl(0.2 \times 0.973 + 0.5 \times 0.260 \times 10^{-1}) = fl(0.194 + 0.1300 \times 10^{-1}) = fl(0.194 + 0.01300) = fl(0.207) = 0.207$.
2- On risque une erreur d'annulation pour $|x|$ proche de 0.
Si $|x|$ proche de 0 on calcule y à partir de la formule

$$y = \frac{2x}{1 - x^2}$$

Exercice 2

a. Soit p_2 le polynôme de degré 2 qui interpole f aux points $x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2$. Démontrer que si $f \in C^3([x_0, x_2])$ alors

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{h^3}{9\sqrt{3}} M,$$

où M est une constante à déterminer.

b. **Sans calcul** donner le polynôme d'interpolation de la fonction $f(x) = \sin(\dfrac{\pi x}{2})$ associé aux noeuds $-1, 0$ et 1.
c. Majorer l'erreur d'interpolation pour toute valeur de x telle que $|x| \leq 1$.
On donne: $\frac{1}{3}\sqrt{3} = 0.577\,35$

Solution

a. $f(x) - p_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \qquad \xi(x) \in [x_0, x_2]$
$\forall x \in [x_0, x_2]\,, \qquad x = x_0 + sh$ avec $s \in [0, 2]$
Alors $(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = s(s - 1)(s - 2)h^3$
on pose $g(s) = s(s - 1)(s - 2), \qquad s \in [0, 2]$
$g'(s) = 3s^2 - 6s + 2$
$g'(s) = 0 \Leftrightarrow s_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3} + 1 \in [0, 2]$ et $s_2 = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} \in [0, 2]$
$\Rightarrow \max\limits_{s \in [0,2]} |g(s)| = \max\{|g(s_1)|\,, |g(s_2)|\} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$
Il en découle que $|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{h^3}{9\sqrt{3}} M$ avec $M = \max\limits_{x \in [x_0, x_2]} \left|f^{(3)}(x)\right|$.
b. La fonction $f(x)$ est une fonction impaire et les noeuds d'interpolation sont symétriques par rapport à l'origine alors le polynôme d'interpolation est impair de degré inférieur ou égal à 2. Ce polynôme s'écrit $p_2(x) = ax$ or $p_2(1) = f(1) = 1$ alors $p_2(x) = x$.
c. Notons que les points $x_i$sont equidistants avec un pas $h = 1$.D'après la question a. $|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{9\sqrt{3}} M$.
Reste à déterminer M.
$f^{(3)}(x) = -\dfrac{\pi^3}{8}\cos(\dfrac{\pi x}{2}) \Rightarrow \forall x \in [-1, 1] \qquad \left|f^{(3)}(x)\right| \leq \dfrac{\pi^3}{8}$
Finalement $\forall x \in [-1, 1]\,, \qquad |f(x) - p_2(x)| \leq \dfrac{\pi^3}{72\sqrt{3}}$.

Exercice 3

a. Montrer que l'itération du point fixe

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 3}{5}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

converge pour toute valeur initiale $x_0 \in [0, 1]$.
b. Combien d'itérations sont-elles pour obtenir une erreur absolue inféreure à 10^{-4}, quand $x_0 = 1$. Donner juste l'expression de n. aucune valeur numérique n'est demandée.
c. Vers quelle limite la suite engendrée par l'itération $x_{n+1} = x_n(2 - \pi x_n)$ converge t-elle pour x_0 suffisament proche? Dans ce cas, quel sera l'ordre de convergence?

Solution

a. On pose $g(x) = \dfrac{x^2 + 3}{5}$, g est continue sur $[0, 1]$ avec $g(0) = \dfrac{3}{5} \in [0, 1]$ et $g(1) = \dfrac{4}{5} \in [0, 1]$.
De plus $g'(x) = \dfrac{2}{5}x$ alors la fonction g est croissante sur $[0, 1] \Rightarrow g([0, 1]) \subset [0, 1]$.
Sachant que $g''(x) = \dfrac{2}{5}$ alors la fonction g' est croissante et positive sur $[0, 1] \Rightarrow \forall x \in [0, 1]\,, |g'(x)| \leq \dfrac{2}{5}$
D'après le théorème du point fixe la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers l'unique point fixe de g sur $[0, 1]$ pour toute valeur initiale $x_0 \in [0, 1]$.
b. On a $|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$ avec $k = \dfrac{2}{5}$et $|x_1 - x_0| = \dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow |x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| = \frac{5}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n \frac{1}{5} = \frac{1}{3} k^n$

Donc $\frac{1}{3} k^n \leq 10^{-4} \Rightarrow k^n \leq 3 \times 10^{-4} \Rightarrow n \geq \frac{\log 3 - 4}{\log 2 - \log 5}$.

c. En supposant que la suite converge alors à la limite on a $x = x(2-\pi x)$ ce qui est équivalent à $x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{\pi}$.

On pose $g(x) = x(2 - \pi x)$ les points fixes de g sont 0 et $\dfrac{1}{\pi}$.

Comme $g'(x) = 2(1 - \pi x)$ alors $g'(0) = 2 > 1$ et 0 est un point fixe répulsif donc la suite ne converge pas vers 0.

Maintenant $g'(\dfrac{1}{\pi}) = 0$ alors $\dfrac{1}{\pi}$ est un point fixe attractif alors la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers ce point fixe pour x_0 proche de $\dfrac{1}{\pi}$ l'ordre de convergence est 2 car $g'(\dfrac{1}{\pi}) = 0$ et $g''(\dfrac{1}{\pi}) = -2\pi \neq 0$.

Exercice 4

a. Déterminer, en utilisant la définition l'ordre de convergence de la suite $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sin(x_n)$ vers $x^* = 0$.

b. Proposer une méthode convergeant quadratiquement pour approcher $\alpha = 1$ une racine de l'équation non lineaire $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x = 2$ pour x_0 suffisament proche de 1.

c. On suppose que la racine $\alpha \in [a, b]$ de $f(x) = 0$ est de multiplicité 3. On suppose que l'on connait x_0 dans un voisinage de α tel que la méthode de Newton converge et que $f(a)f(b) < 0$. Quelle méthode d'approximation de α converge-t-elle plus vite la méthode de bissection ou celle de Newton?

Solution

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|^r} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2} \frac{|\sin(x_n)|}{|x_n|^r} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|\sin(x_n)|}{|x_n|^r}$

Si $r = 1$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|} = \dfrac{1}{2}$

Si $r < 1$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|r} = 0$

Si $r > 1$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|r} = +\infty$

La suite converge linéairement vers 0 avec un coefficient de convergence asymptotique égal à $\dfrac{1}{2}$.

b.On pose $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$. Il faut vérifier si la racine est simple ou multiple.

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5$ et $f'(1) = 0$

$f''(x) = 12x^2 - 6x - 6 = 6(2x^2 - x - 1)$ $\qquad$ et $f''(1) = 0$

$f'''(x) = 6(4x - 1)$ $\qquad$ et $f'''(1) = 18 \neq 0$,

donc l'ordre de multiplicité de la racine $\alpha = 1$ est 3.

Pour approcher α par une méthode quadratique on peut utiliser la méthode de Newton modifiée:

$$x_{n+1} = x_n - 3\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - 3\frac{x_n^4 - x_n^3 - 3x_n^2 + 5x_n - 2}{4x_n^3 - 3x_n^2 - 6x_n + 5}, \quad n \geq 0$$

On peut aussi appliquer la méthode de Newton à la dérivée seconde

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f''(x_n)}{f'''(x_n)} = x_n - \frac{2x_n^2 - x_n - 1}{4x_n - 1}, \quad n \geq 0$$

c. Comme α est une racine multiple la méthode de Newton converge linéairement avec un coefficient de convergence asymptotique $1 - \frac{1}{m} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
Sachant que la méthode de bissection converge linéairement avec un coefficient de convergence asymptotique égal à $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ alors dans ce cas, la méthode de bissection converge plus vite que la méthode de Newton.