Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
07/12/17
L2 Math : Analyse III

CONTROLE CONTINU (durée 02h)

<u>Exercice 01 :</u> 05 pts

Etudier la nature et calculer en cas de convergence la somme des séries :

1) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} th\left(\frac{1}{2^n}\right)$. $\left(ind: \frac{thx}{2} = \frac{1}{th2x} - \frac{1}{2thx}\right)$ 2) $\sum_{n\geq 2}\left(\sum_2^n \frac{1}{2k\sqrt{lnk}}\right)$ 3) $\sum_{n\geq 1} \tan\left(\pi\sqrt{4n^2+1}\right)$

<u>Exercice 02 :</u> 06 pts

Soit f une fonction de classe C^∞ $dans\ \mathbb{R}$ telle que :

$f(0) = 4$ et $\forall n \geq 1\ f^{(n)}(0) = -\frac{n(2n-1)}{2n+1}\ f^{(n-1)}(0)$

1. Si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est le développement de Mac – Laurin de f, établir que $a_n = 4\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$, en déduire le rayon et le domaine de convergence de la série *associée* à $f(x)$.
2. *Calculer* pour $|X| < 1$, les sommes des séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} X^{2n+1}$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^{2n+1}}{(2n+1)}$
   En déduire l'expression de la somme $f(x)$ en fonction des fonctions usuelles.
3. Trouver le plus petit entier n donnant une valeur approchée à 10^{-2} près de π, préciser le signe de l'erreur.

<u>Exercice 03 :</u> 09 pts

I. Soit la <u>suite</u> de fonctions définie par $f_n(x) = \frac{x}{n(x^2+1)}$ $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$.

1) Etudier la convergence simple et uniforme de la <u>suite</u> $(f_n(x))_n$ dans $\mathbb{R}$.

2) Comparer $lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$ *et* $\int_0^{+\infty} lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, dx$,que peut-on conclure ?

II. On considère la <u>série</u> de fonctions de terme général

$\forall n \geq 1\ u_n(x) = (-1)^n arctan\frac{x}{n(x^2+1)}$ $x \in \mathbb{R}$.

1) Trouver le domaine de convergence D_c de la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$.

2) Etudier la convergence **normale, uniforme et absolue** de la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ sur D_c .

3) Montrer que la somme $S(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)$ *est une fonction dérivable dans* D_c.

Vérifier que : $S'(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n(1-x^2)}{n^2(x^2+1)^2+x^2}$.

4) Etudier le signe de $S'(x)$ dans $\mathbb{R}$ .Montrer que la fonction $S(x)$ admet un minimum au point x=1. (on vérifiera que $S(1) < 0$)

5) Vérifier que de la fonction $S(x)$ est impaire et étudier ses variations dans D_c .

Question facultative : Donner l'allure du graphe de la fonction $S(x)$

Le corrigé

<u>Exercice 01 :</u>05 pts

1) 02pts $u_n=\frac{1}{2^n}th\left(\frac{1}{2^n}\right)$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0\,,thx\overset{v(0)}{\sim}x\,,\;0\le u_n\sim\frac{1}{2^{2n}}=\left(\frac{1}{4}\right)^n=q^n,|q|<1\Rightarrow\sum_{n\ge2}u_n converge\,.$
- $u_n=\frac{1}{2^n}th\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2^{n-1}th\frac{1}{2^{n-1}}}-\frac{1}{2^nth\frac{1}{2^n}}=a_{n-1}-a_n\;(série\;téléscopique).$

$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{thx_n}=1\quad\left(x_n=\frac{1}{2^n}\to0\;qd\;n\to+\infty\right)$

$S_n=\sum_2^n u_k=a_1-a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{2th\left(\frac{1}{2}\right)}-1$

3) 01,5pts

L'équivalent de $u_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2k\sqrt{lnk}}$: comparaison avec l'intégrale :

- f(x)= $\frac{1}{2x\sqrt{lnx}}$ $x\ge2$,f est positive ,décroissante et continue .
- $\int_2^n f(x)dx=\int_{ln2}^{lnn}\frac{du}{2\sqrt{u}}=\left[\sqrt{u}\right]_{ln2}^{n}=\sqrt{lnn}-\sqrt{ln2}$

Alors $u_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2k\sqrt{lnk}}\sim\sqrt{lnn}-\sqrt{ln2}\to+\infty\neq0\Rightarrow\sum_{n\ge2}u_n\;diverge\,.$

4) 01,5pts

$u_n=\tan\left(\pi\sqrt{4n^2+1}\right)=\tan\left(\pi2n\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)=\tan\left(\pi2n\left(1+\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{4n^2}\right)\right)\right).$

$u_n=\tan\left(\pi2n+\frac{\pi}{4n}(1+o(1))\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4n}(1+o(1))\right)\sim.\frac{\pi}{4n}\Rightarrow\sum_{n\ge2}u_n\;\;diverge.$

($tanx\ge0\;si\;\;0<x<\frac{\pi}{2}$ alors $u_n\ge0\;\forall n\ge1$)

<u>Exercice 02 :</u> 06 **pts**

1) (**02.25pts**) f est une fonction de classe C^∞ $dans\;\mathbb{R}$ telle que :

$f(0)=4$ et $\forall n\ge1\;f^{(n)}(0)=-\frac{n(2n-1)}{2n+1}f^{(n-1)}(0)$

$f'(0)=-\frac{4}{3},\;f''(0)=4(-1)^2\frac{1.2.3}{3.5}=4(-1)^2\frac{1.2}{5},\;f^{(3)}(0)=4(-1)^3\frac{1.2.3.}{7}$

$\forall n\ge1\;f^{(n)}(0)=4(-1)^n\frac{n!}{2n+1}$, ainsi $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=4\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$ et $f(x)=4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^n}{(2n+1)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1\;alors\;le$ rayon de convergence $R=1.$

La série converge si $|x|<1\;et\;diverge\;pour\;|x|>1$,

Si x =1 on a $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$ est une série alternée convergente.

Si x =-1 on a $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)}$ est une série divergente.

le domaine de convergence $D_c=]-1,1].$

2) **(02.75pts)** Le rayon de convergence des deux séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}X^{2n+1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{X^{2n+1}}{(2n+1)}$ est égal à $R=1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{-ln(2n+1)}{(2n+1)}}=1$

$S_1(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1},S_1'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}.$

$S_1(X)-\underbrace{S_1(0)}_{0}=\int_0^X\frac{dt}{1+t^2}=arctanX.$

$S_2(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)}x^{2n+1},S_2'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\;x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}.$

$S_2(X)-\underbrace{S_2(0)}_{0}=\int_0^X\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int_0^X\left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}\right)dt=\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+X}{1-X}\right)=ArgthX.$

on déduit :

- si $x > 0$ $f(x) = 4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^n = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1} = \frac{4arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.
- si $x < 0$ $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{(2n+1)}x^n = \frac{4}{2\sqrt{|x|}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)}\left(\sqrt{|x|}\right)^{2n+1} = \frac{4Argth\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|}}$.

3) **(01pt) (**D'après le <u>second lemme d'Abel :</u> $\lim_{x\to 1} f(x) = 4arctan1 = \pi = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{(2n+1)}$

C'est une série alternée convergente $alors\ |R_n| \leq \frac{4}{2n+3} \leq 10^{-2}$

Pour $n \geq 199$ la majoration ci-dessus est vérifiée en plus $R_{199} = \sum_{k\geq 200}^{+\infty}\frac{4(-1)^k}{(2k+1)}$ $est\ positif$ car son premier terme est positif. Ainsi S_{199} est une valeur approchée par <u>défaut</u> de π.

<u>Exercice 03 :</u> 09 **pts**

I. 1) 02pts

- <u>La convergence simple</u> :

$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$ et $\forall x \neq 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{x}{n(x^2+1)} = 0$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = 0$

- <u>La convergence uniforme</u> :

$\|f_n - f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{|x|}{n(x^2+1)}$,on a $f'_n(x) = \frac{1-x^2}{n^2(x^2+1)^2}$ et f_n impaire

x	0		1		$+\infty$
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2n}$	$\searrow$	0

$\|f_n\| = \frac{1}{2n} \to 0 \Rightarrow f_n \rightrightarrows 0\ sur\ \mathbb{R}$.

2) **01pt** $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{x}{n(x^2+1)}dx = \left[\frac{1}{2n}ln(x^2+1)\right]_0^{+\infty} = +\infty$.

$\int_0^{+\infty} lim_{n\to+\infty}f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} 0\,dx = 0$..

$f_n\ est\ continue$ et $f_n \rightrightarrows 0\ sur\ \mathbb{R}\ mais\ lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \neq \int_0^{+\infty} lim_{n\to+\infty}f_n(x)\,dx$ car l'intervalle d'intégration n'est pas <u>borné</u>.

II.

1) **02pts** $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \geq 1$ $u_n(x) = (-1)^n arctan\left(f_n(x)\right)$.

- $\forall n \geq 1$ $u_n(0) = 0$ alors $\sum_{n\geq 1} u_n(0)$ converge .
- $si\ \ x > 0$ $u_n(x) = (-1)^n V_n$ avec $V_n = arctan\left(f_n(x)\right) >$

$$\begin{cases} V_n > 0 \\ (V_n)_n \quad est\ décroissante \\ \lim_{n\to+\infty} V_n = 0 \end{cases}$$

Donc $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est une série alternée convergente

- $si\ x < 0$, $u_n(x) = -\ u_n(-x)$ (impaire) on applique le critère d'Abel à$\sum_{n\geq 0} u_n(-x)$ $alors$ $\boxed{D_c = \mathbb{R}}$

2) 02.5pts i) <u>Convergence Normale</u> :

$\|u_n\| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|u_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|arctan\left(f_n(x)\right)\right| = arctan\frac{1}{2n} \sim \frac{1}{2n}$. $\sum_{n\geq 1}\|u_n\|$ DV alors

$\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ ne converge pas normalement sur D_c.

ii) Convergence uniforme : $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est une série alternée convergente alors $\|R_n\| \leq$

$\|V_{n+1}\| = arctan\frac{1}{2(n+1)} \to 0$ *alors* $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$

iii) Convergence absolue :

$\forall x \in \mathbb{R}^* \; |u_n(x)| \sim \frac{c_x}{n}$ avec $c_x = \frac{|x|}{(x^2+1)} > 0$ alors $\sum_{n\geq 1}|u_n(x)|$ *diverge*

Alors la série ne converge pas absolument dans $\mathbb{R}$ **sauf pour x = 0**

4) **(01pt) Dérivabilité de S(x) :**

$i) u_n(x)$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$,

$$ii) \exists x_0 = 0 : \sum_{n\geq 1} u_n(x_0) \;\; CV \qquad .$$

$$iii) u'_n(x) = (-1)^n V_n(x) \;, \forall x \in \mathbb{R} \;\; V_n(x) \leq \frac{n(1+x^2)}{n^2(x^2+1)^2} \leq \frac{1}{n} \;\; alors \;\; \|V_n\| \to 0$$

$$V_n = \frac{n(1-x^2)}{n^2(x^2+1)^2+x^2} = (1-x^2)\frac{n}{n^2(x^2+1)^2+x^2}, sa\ dérivée(\,par\ rapport\ à\ n)$$

$V'_n = (x^2-1)\frac{n^2(x^2+1)^2-x^2}{(n^2(x^2+1)^2+x^2)^2}$ *est de même signe que* (x^2-1) *pour* $n \geq 1$

D'où la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ est monotone. Alors d'après i-iii $\sum_{n\geq 1} u'_n(x)\, CU$ *sur* $\mathbb{R}$

On déduit que la somme $S(x)$ de la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est dérivable et

$\forall x \in \mathbb{R} \quad S'(x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{n(1-x^2)}{n^2(x^2+1)^2+x^2}$.

4) **(01pt) Etude de $S'(x)$**

$S'(x) = (1-x^2)\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{n}{n^2(x^2+1)^2+x^2}$ *est une série alternée convergente*,son

signe est le même de son premier terme ie *celui de* (x^2-1),ainsi :

$S'(x) > 0$ *pour* $|x| > 1 \Rightarrow S$ *est croissante sur* $]-\infty,-1[\,\mathrm{U}\,]1,+\infty[$

$S'(x) < 0$ *pour* $|x| < 1 \Rightarrow \quad S$ *est décroissante sur* $]-1,1[$.

$S'(\pm 1) = 0$, alors S admet un minimum au point x=1 et un maximum au point x=-1

$S(1) = \sum_{n\geq 1}(-1)^n arctan\frac{1}{2n} < 0$ *car son premier terme* $(-arctan\frac{1}{2})$ *est négatif*.

5) **(01pt) Les variations de $S(x)$**

$S(x)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ (*puisqu'elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$), *on* déduit :

$lim_{x\to+\infty} S(x) = lim_{x\to+\infty} \sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} lim_{x\to+\infty} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} 0 = 0.$

Comme $u_n(x)$ *est impaire* alors $S(-x) = -S(x)$ alors S est impaire.

x	0		1		$+\infty$
$S'(x)$		-	0	+	
$S(x)$	0	↘	$S(1)$	↗	0