Université de Tlemcen — Tlemcen le 05/12/2017.

Département de mathématiques

durée : 2 heures

Partiel d'Algèbre 3

- pas de calculatrice
- pas de portable
- merci.

Exercice n° 1

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, f un endomorphisme de E tq $f^3 = f$ montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus E_1 \oplus E_{-1}$

où

$$E_1 = \{x \in E / f(x) = x\} \text{ et } E_{-1} = \{x \in E / f(x) = -x\}$$

Exercice n° 2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Montrer que $\operatorname{rg} A \geq 2$, pour quelles valeurs de a et b $\operatorname{rg} A = 2$.

Exercice n° 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et Δ_n le déterminant d'ordre n défini par.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 \cdots & S_2 \\ \vdots & \vdots & S_3 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \cdots & S_n \end{vmatrix} \quad \text{où pour tout } 1 \leq k \leq n \quad S_k = \sum_{i=1}^{k} i$$

Montrer que $\Delta_n = n!$

Exercice n° 4

Résoudre suivant les valeurs des paramètres réels a, b, c, d le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

Exercice n° 5

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, montrer que $\operatorname{rg} A = r$ ssi on peut extraire de A un mineur d'ordre r non nul tel que tous les bordants de δ dans A sont nuls.

Exercice n° 6

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E, V un sous espace vectoriel de E tel que $V \subset f(V)$, montrer que $\dim V = \dim f(V)$.

Ex1 : 4pts ; Ex2 : 3pts ; Ex3 : 4,5pts ; Ex4 : 4,5pts , Ex5 : 4pts ; Total = 20pts

Ex6 : 1,5pts

Bon Courage

Corrigé du partiel du module "Algèbre 3" du 05/12/2017

Exercice n° 1

On utilise la méthode de "Analyse et Synthèse"

Analyse : on suppose que la décomposition existe ie

$\forall x \in E \quad x = x_0 + x_1 + x_{-1}$ avec $x_0 \in \mathrm{Ker} f$, $x_1 \in E_1$, $x_{-1} \in E_{-1}$

$\overset{f \text{ linéaire}}{\Longrightarrow} \quad f(x) = f(x_0) + f(x_1) + f(x_{-1}) = x_1 - x_{-1}$

$\Longrightarrow \quad f^2(x) = f(x_1) - f(x_{-1}) = x_1 + x_{-1}$

$\Longrightarrow \quad x_1 = \dfrac{f(x) + f^2(x)}{2}, \quad x_{-1} = \dfrac{f^2(x) - f(x)}{2}, \quad x_0 = x - f^2(x).$ 2

Synthèse : Il suffit de vérifier que $x_1 \in E_1$, $x_{-1} \in E_{-1}$, $x_0 \in \mathrm{Ker} f$.

En effet $f(x_1) = \dfrac{f^2(x) + f^3(x)}{2} \overset{f^3 = f}{=} \dfrac{f^2(x) + f(x)}{2} = x_1 \Rightarrow x_1 \in E_1$.

$f(x_{-1}) = \dfrac{f^3(x) - f^2(x)}{2} \overset{f^3 = f}{=} \dfrac{f(x) - f^2(x)}{2} = -x_{-1} \Rightarrow x_{-1} \in E_{-1}$.

$f(x_0) = f(x) - f^3(x) \overset{f^3 = f}{=} f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow x_0 \in \mathrm{Ker} f$.

Ainsi l'analyse montre l'unicité et la synthèse st une vérification qui montre l'existence. 1 + 1

Exercice n° 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Le mineur encadré : $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg} A \geq 2$. 1

$\mathrm{rg} A = 2$ si les bordants de ce mineur dans A sont nuls.

ie : $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 2 & b \\ 3 & 0 & -4 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \quad a = 1$ et $b = 3$ 1 + 1

Conclusion $\mathrm{rg} A = 2$ si $a = 1$ et $b = 3$

Exercice n° 3 $\quad S_k = \sum_{i=1}^{k} i \quad 1 \le k \le n$ $\quad$ enchainement et explication (1,5) + (1)

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} S_1 & \cdots & & S_1 \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_2 \\ \vdots & & S_3 & S_3 \\ \vdots & & & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_n \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ \\ L_{n-1} \\ L_n \end{matrix} = \begin{vmatrix} S_1 & & \cdots & S_1 \\ 0 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & & 3 & \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_2 \\ L_{n-1} - L_{n-2} \\ L_n - L_{n-1} \end{matrix} = n! \quad \text{Résultat } (1) + (1)$$

Exercice n° 4

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = (a-b)(b-c)(c-a)$$ (0.5)

1er cas $\quad a \ne b \ne c$ $\quad a, b, c$ distincts $\Rightarrow$ le système est de Cramer

$$\Rightarrow x = \frac{(c-d)(d-b)}{(c-a)(a-b)} \; ; \; y = \frac{(a-d)(d-c)}{(a-b)(b-c)} \; ; \; z = \frac{(b-d)(d-a)}{(b-c)(c-a)}$$ (1)

2ème cas

$a \ne b$ et $b = c$ $\Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow \delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b - a \ne 0$ car $a \ne b$. (0,5)

le système est compatible ssi $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ a^2 & b^2 & d^2 \end{vmatrix} = 0$ ssi $d = a$ ou $d = b$ + (0,5)

pour $d = a$ on pose $z = \alpha$ $\Rightarrow \begin{cases} x + y = -\alpha + 1 \\ ax + by = -c\alpha + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -\alpha + 1 \\ ax + by = -b\alpha + a \end{cases}$

$\Rightarrow y = -\alpha$ et $x = 1$ (0.5)

cl: $\quad Sol_{\{a \ne b,\, b = c,\, d = a\}} = \{1, -\alpha, \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ (0.5)

pour $d = b$ de la même manière on trouve

$$Sol_{\{a \ne b,\, b = c,\, d = b\}} = \{0, 1-\alpha, \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

3ème cas $\quad a = b = c \qquad \delta = 1 \ne 0$

le système est compatible si $d = a$ (0.5)

$\Rightarrow x + y + z = 1 \Rightarrow Sol_{\{a = b = c = d\}} = \{1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta,\ \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\}$ (0.5)

Exercice n° 5 : voir cours "$\Rightarrow$ (2)" "$\Leftarrow$ (2)"

Exercice n° 6 : $\dim V$ est finie par ex $\dim V = p$, soit $\{v_1, \dots, v_p\}$ une base de V

Soit $y \in f(V) \Rightarrow \exists x \in V / y = f(x) \Rightarrow x = a_1 v_1 + \dots + a_p v_p$ et $y = f(x)$ (1) + (0.5)

$\Rightarrow y = f(a_1 v_1 + \dots + a_p v_p) \overset{f \text{ linéaire}}{=} y = a_1 f(v_1) + \dots + a_p f(v_p) \Rightarrow \{f(v_1), \dots, f(v_p)\}$ est une famille génératrice de $f(V)$ or de toute famille génératrice on peut extraire une base

$\Rightarrow \dim f(V) \le p$ d'autre part $V \subset f(V) \Rightarrow V$ ssev de $f(V) \Rightarrow \dim V \le \dim f(V)$

$\Rightarrow p \le \dim f(V) \Rightarrow p = \dim f(V) \Rightarrow \dim V = \dim f(V)$ c.q.f.d