Université Abou Bakr Belkaïd (Tlemcen)
Faculté des Sciences
Année Universitaire : 2017 - 2018

<u>**Module**</u> **: Math 2- Tronc commun Sciences et Technologies**

Série de TD n°04-Matrices

Exercice 01 :

1. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, et\ D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer, lorsque cela est bien possible : AB, BA, AC, CA, CD, DC, $(2B - A^t)C, C^t(2B^t - A)$

2. Soit P et Q deux matrices carrées de taille n. Est-ce qu'on a

$$(P + Q)^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ$$

3. Soit la matrice $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de $a, b\ et\ c$ dans les cas suivants :
   - $X^2 = 0$
   - $X^2 = X$
   - $X^2 = I_2$

Exercice 02 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $et\ B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) Vérifier que $A^2 \neq 0\ et\ A^3 = 0$.
2) Exprimer B en fonction de A et de la matrice unité I_3. En déduire les puissances $B^k, pour\ k \in \mathbb{N}$.

Exercice 03 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ $tel\ que\ x \in \mathbb{R}$

1) Calculer $A^n, n \in \mathbb{N}$
2) Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.
3) En déduire $(A^{-1})^n$

Exercice 04 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Exercice 05 : Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, puis calculer (dans le cas affirmatif) leurs inverses :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \ (en\ utilisant\ le\ calcul\ des\ cofacteurs)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \ (en\ utilisant\ la\ méthode\ de\ Gauss)$$

Exercice 06 : Résoudre les systèmes suivants :

$$1)\begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ 5x - 2y = 12 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} 2x - 4y + 3z = -6 \\ 2x + 5y + 4z = 2 \\ 4x + 2y = 4 \end{cases}$$

Utiliser la méthode de Gauss pour le premier et le troisième système, et celle de Cramer pour le second système