Université Abou Bekr Belkaid **A.U 2017-2018**
Faculté des Sciences
Tronc Commun SM(Maths2)

TD N°4 Applications Linéaires et Matrices

Exercice 1: On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, -3x+3y) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Calculer l'image du vecteur $v = (1,1)$. f est-elle injective?
3. Déterminer le vecteur $u = (x,y)$ tel que $f(u) = (1,0)$. f est-elle surjective?
4. Donner une base de $\ker(f)$ et une base de $Im(f)$.

Exercice 2: On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-2x+y+z, x-2y+z, x+y-2y)) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$, en déduire $\dim(Im(f))$.
3. Donner une base de $Im(f)$.

Exercice 3: Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire, $B_1 = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $B_2 = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$A = M_f(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'image d'un vecteur $u = (x,y)$ par f.
2. Déterminer l'image de B_1.
3. Déterminer le noyau de f. En déduire le rang de f.

Exercice 4: Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et B une matrice de $\mathcal{M}_{(2,3)}(\mathbb{R})$ définies par:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer les matrices $A+B, AB, BA, A^2, B^2, \ {}^tBA$ et $A+2I_2$, si elles ont un sens.

Exercice 5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3. Calculer $A^3 - A^2 + A - I$.
2. Exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et I.
3. Exprimer A^4 en fonction de A^2, A et I.

Exercice 6 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que M est inversible.
2. Calculer la comatrice de M.
3. En déduire l'inverse de M.

Exercice 7 Soit $u_1 = (1, 2)$ et $u_2 = (1, 3)$.

1. Montrer que (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}$.

   Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par $f(u_1) = 2u_2$ et $f(u_2) = u_1 + 2u_2$.
2. Quelle est la matrice B de f dans la base (u_1, u_2)?
3. Soit $v = (3, -4)$ dans la base (u_1, u_2), quelles sont les cordonnées de $f(v)$ dans la base (u_1, u_2)?
4. Quelle est la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$?