Université Abou Bekr Belkaid **A.U 2017-2018**
Faculté des Sciences
Tronc Commun SM(Maths2)

TD N°3 Espaces vectoriels

Exercice 1: Dans l'ensemble $\mathbb{Z}^2$, on définit deux lois de composition interne, T et $\star$, par:

$$(a,b)T(a',b') = (a+a', b+b')$$
$$(a,b) * (a',b') = (aa', 0).$$

1. Calculer $(-1,2)T(4,-3)$; $(4,2)*(-1,-3)$.
2. Montrer que, muni de ces deux lois, $\mathbb{Z}^2$ a une structure d'anneau commutatif. Est-ce un anneau unitaire?

Exercice 2: L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux opérations suivantes:

$$(x,y)+(x',y') = (x+y+1, y+y'+1) \text{ et } \lambda.(x,y) = (\lambda x, \lambda y);\ \lambda \in \mathbb{R},$$

est-il un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$?

Exercice 3:

1. Déterminer si les vecteurs $v_1 = (2,-1,5)$, $v_2 = (7,-8,2)$ et $v_3(3,-4,-6)$ sont linéairement dépendants ou indépendants.
2. Qu'en est-il des vecteurs $u_1 = (2,-1,5)$, $u_2 = (5,-6,7)$ et $u_3 = (1,-4,-3)$?

Exercice 4:(supp) Soit v_1, v_2 et v_3 des vecteurs linéairement indépendants dans un $K-$espace vectoriel E. Les éléments suivants sont-ils linéairement indépendants? Linéairement dépendants?

1. v_1, v_2.
2. v_1+v_2, v_1+v_3, et v_2+v_3.
3. v_1-v_2, v_1-v_3 et v_2-v_3.

Exercice 5 Dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{F}$ des fonctions de $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ dans $\mathbb{R}$, on considère les vecteurs définis par:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1},\ g(x) = \frac{3}{x-1},\ h(x) = \frac{-2}{x+1}.$$

La famille $\{f, g, h\}$ est-elle libre?

Exercice 6 Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est-elle libre? Est-ce une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 7

1. Soient $F = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 /\ x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ y, z \in \mathbb{R}\}$.
   - Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
   - Préciser leurs bases et leurs dimensions.
   - Montrer que F et H sont une somme directe de $\mathbb{R}^3$?
2. Soit $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = 2y - z,\ t = x + y + z\}$.
   - Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En donner une base et la dimension.
   - Trouver un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$.