Université Abou Bekr Belkaid **A.U 2017-2018**
Faculté des Sciences
Tronc Commun SM(Maths2)

TD N°2 Développements limités

Exercice 1:

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ entre 16 et 17 avec un reste à l'ordre 2.
2. Montrer que $\frac{31}{128}$ est une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{17}}$ à 5×10^{-1} près.

Exercice 2: Soit $f(x) = 1 - x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = 1 + 4x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$

où $\varepsilon_1(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$, $\varepsilon_2(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$.

1. Donner le $DL_n(0)$ de $f+g$ et $f.g$ où n est un ordre maximal.
2. Soit $h(x) = g(x) - 1$. Montrer que $\frac{f}{h}$ n'admet pas un $DL(0)$.

Exercice 3: Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre n des fonctions

f définies ci-dessous.

1. $f(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$; $n = 2$, $n = 5$.
2. $f(x) = e^x(1 + x + x^2)$; $n = 2$.
3. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$; $n = 3$.
4. $f(x) = \sqrt{2 + x^2}$; $n = 5$.
5. $f(x) = \ln(\cos x + \sin x)$; $n = 2$.
6. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$; $n = 2$.
7. $f(x) = e^{\sqrt{1+2\cos x}}$; $n = 2$.
8. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$; $n = 3$.

Exercice 4: Donner les développements limités des fonctions suivantes,

au point et à l'ordre indiqués.

1. $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 1.
2. $\ln x$ à l'ordre 3 en 2.
3. $\sin x$ à l'ordre 4 en $\pi/4$.
4. $e^{\cos x}$ à l'ordre 2 en $\pi/2$.

Exercice 5: En utilisant les développements limités, calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 + \dfrac{1}{x})^x$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \Big(\cos(1/x)\Big)^{x^2}$.
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}$.

Exercice 6:

1. Donner le $DL_2(0)$ de $\cos(x + \frac{\pi}{4})$, $\cos^2(x + \frac{\pi}{4})$ et $\cos^{-2}(x + \frac{\pi}{4})$.

2. Donner la dérivée de la fonction tan.
3. En déduire le DL à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \tan(x + \pi/4)$.
4. Donner le $DL_2(\pi/4)$ de $x \mapsto \tan x$ par une autre méthode.

Exercice 7:(Supp) Soit

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{3}{4}\cos x.$$

1. Donner le DL de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.
2. En déduire l'équation de la tangente à f en 0.
3. Préciser la position au voisinage de 0 de cette tangente par rapport au graphe de f.