Université de Tlemcen Mercredi 6 Juin 2018

Faculté des Sciences **Module :** Math 2- Tronc commun ST

Département des Mathématiques **Durée :** 1 h-30mns

Examen de rattrapage

« L'usage de la calculatrice est strictement interdit »

Exercice 01 : (05 pts) Soit la fonction

$$f(x) = x\ln(2+\frac{1}{x})$$

1. Déterminer le développement limité de la fonction $x \longmapsto \ln(2+x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. En déduire le développement de la fonction $x \longmapsto \ln(2+\frac{1}{x})$ à l'ordre 2 au voisinage de l'infinie.
3. Montrer que la fonction f admet la droite d'équation $y = xln2 + \frac{1}{2}$ comme asymptote au voisinage de l'infinie.

Exercice 02 : (**04 pts)** Préciser le type puis résoudre l'équation suivante :

$$xy' = 2y - 2\sqrt{y}$$

Exercice 03 : (06 pts) Calculer les primitives suivantes:

$$I(x) = \int (\cos x)^3 dx \;\; et\, J(x) = \int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} dx$$

Exercice 04 : (05 pts) En utilisant la méthode de Gauss, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

Corrigé

Exercice 01 : (05 pts)

1. **(02 pts)**

$$\ln(2+x)=\ln\left(2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\ (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$tel\ que\ \frac{x}{2}\in V(0) quand\ x\in V(0) (\mathbf{0.25\ pt})$$

D'où :

$\ln(2+x)=\ln 2+\frac{x}{2}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}+o(x^2)$ **(01 pt)**

$\ln(2+x)=\ln 2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$ **(0.25 pt)**

2. **(01 pt)**

On a $\frac{1}{x}\in V(0) quand\ x\in V(\infty)$ **(0.25 pt)**

D'après la réponse de la première question, on aura :

$$\ln(2+\frac{1}{x})=\left(\ln 2+\frac{\frac{1}{x}}{2}-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{8}+o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)\right)\ (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$\ln(2+\tfrac{1}{x})=ln\ 2+\tfrac{1}{2x}-\tfrac{1}{8x^2}+o(\tfrac{1}{x^2})\textbf{(0.25 pt)}$$

3. **(02 pts)** On a

$f(x)=x\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)=xln\ 2+1/2-1/8x+o(1/x)$ **(0.5 pt)**

$comme\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(xln\ 2+\frac{1}{2})\right)=\lim_{x\to\pm\infty}(-\frac{1}{8x})=0$ **(01 pt)**

On en déduit que la fonction f admet la droite d'équation $y=xln2+\frac{1}{2}$ comme asymptote au voisinage de l'infinie **(0.5 pt).**

Exercice 02 : (04 pts)

L'équation $xy'=2y-2\sqrt{y}$ est une équation différentielle du premier ordre de Bernoulli avec $\alpha=\frac{1}{2}$ **(01 pt)**

En divisant l'équation par $2\sqrt{y}$ on obtient :

$$x\frac{y'}{2\sqrt{y}}=\sqrt{y}-1\ (\mathbf{0.5\ pt})$$

On pose $z=\sqrt{y}\ donc\ z'=\frac{y'}{2\sqrt{y}}$ **(0.5 pt)**

L'équation devient : $xz' = z - 1$ $(\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$qui est une équation linéaire avec un second membre constant **(0.5 pt)**, donc on peut la voir comme équation à variables séparables :

$$x\frac{dz}{dx} = z - 1$$

$$(z = 1\ ou\ encore\ y = 1\ est\ une\ solution\ triviale, on\ suppose\ maintennant\ que\ z \neq 1)$$

Ce qui implique que : $\frac{dz}{z-1} = \frac{dx}{x}\ d'$où $\ln|z-1| = \ln|x| + c$ **(0.5 pt)**

Ou encore $z - 1 = kx$

La solution de notre équation est $y(x) = (1 + kx)^2\ tq\ k\ constante\ réelle\ (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$.

Exercice 03 : (06 pts)

1. **(02 pts)**

$$I(x) = \int (\cos x)^3\ dx = \int (\cos x)^2 \cos x\ \ dx = \int (1 - (\sin x)^2) \cos x\ \ dx\ \ (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$$

On effectue le changement de variable suivant :

$$\left\langle \begin{matrix} u = \sin x \\ du = \cos x\ dx \end{matrix} \right\rangle (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$$

Pour obtenir :

$$I = \int (1 - u^2) du = u - \frac{1}{3}u^3 + c\ (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$$

D'où : $I(x) = \sin x - \frac{1}{3}(\sin x)^3 + c\ (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$

2. **(04 pts)** $J(x) = \int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} dx$

   On a

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = 1 + \frac{2x}{x^2 - x + 1}\ \ (\mathbf{0.25}\ \boldsymbol{pt})$$

Le polynôme $(x^2 - x + 1)$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ $(\Delta < 0)$, donc la fraction $\frac{2x}{x^2-x+1}$ est une fraction simple du second espèce **(0.25 pt)**:

$$\frac{2x}{x^2 - x + 1} = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{x^2 - x + 1}\ \ (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{4/3}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)^2}\ \ (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$$

D'où :

$$J(x)=\int dx+\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\int \frac{4/3}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2}dx\ \ (\mathbf{0.25\,pt})$$

On a : $\int dx = x + c_1$ $(\mathbf{0.25\,pt})$

et $\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx = \ln(x^2-x+1)+c_2$ $(\mathbf{0.5\,pt})$

D'autre part :

$$\int \frac{4/3}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2}dx = \left\langle \begin{array}{c} t=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) \\ dt=\frac{2}{\sqrt{3}}dx \end{array} \right\rangle (\mathbf{0.5\,pt})$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{1+t^2}\ \ (\mathbf{0.25\,pt})$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}Arctg(t)+c_3(\mathbf{0.25\,pt})$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\ Arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+c_3\ (\mathbf{0.25\,pt})$$

Ce qui donne :

$$J(x)=x+\ln(x^2-x+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\ Arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+c\ (\mathbf{0.25\,pt})$$

Exercice 04 : (05 pts)

- **Première méthode :**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \underset{\boldsymbol{L_3-L_1}}{\overset{}{\sim\, \boldsymbol{L_2-2L_1}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 1 & -3 \end{array}\right)\ (\mathbf{0.75\,pt})\times \mathbf{2}$$

$$\underset{\boldsymbol{L_3-\frac{5}{3}L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & \frac{16}{3} \end{array}\right)\ (\mathbf{0.75\,pt})$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{8}{3}z = \frac{16}{3} \\ -3y - z = -5 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases} \ (\mathbf{0.75\,pt}) \times \mathbf{3}$$

D'où :

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \ (\mathbf{0.5\,pt})$$

- **Deuxième méthode :**
  Le système est équivalent à
  $$AX = B \ avec \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ et \ B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \ (\mathbf{0.5\,pt})$$
  On commence par calculer l'inverse de A en utilisant la méthode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} \\ \boldsymbol{L_2 - 2L_1} \\ \boldsymbol{L_3 - L_1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) (\mathbf{0.5\,pt}) \times \mathbf{2}$$

$$\sim \begin{array}{r} \boldsymbol{L_1 + \frac{2}{3}L_2} \\ \\ \boldsymbol{L_3 - \frac{5}{3}L_2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 & 7/3 & -5/3 & 1 \end{array}\right) (\mathbf{0.5\,pt}) \times \mathbf{2}$$

$$\sim \begin{array}{r} \boldsymbol{L_1 - \frac{1}{8}L_3} \\ \boldsymbol{L_2 + \frac{3}{8}L_3} \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/8 & 7/8 & -1/8 \\ 0 & -3 & 0 & -9/8 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & 0 & 8/3 & 7/3 & -5/3 & 1 \end{array}\right) (\mathbf{0.5\,pt}) \times \mathbf{2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/8 & 7/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 3/8 & -1/8 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 7/8 & -5/8 & 3/8 \end{array}\right) (\mathbf{0.5\,pt})$$

D'où

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/8 & 7/8 & -1/8 \\ 3/8 & -1/8 & -1/8 \\ 7/8 & -5/8 & 3/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \ (\mathbf{0.5\,pt})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ (\mathbf{0.5\,pt})$$