Université Abou Bekr Belkaid — **A.U 2017-2018**
Faculté des Sciences- T.C SM — **06/06/2018**

Rattrapage (MATHS2)-1^h30^{mn}

(L'usage de la calculatrice est interdit)

Exercice 1:(06pts) Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x - 6y + 5z = 0\}$ et $w_1 = (4, 3, 2),\ w_2 = (3, 1, 0)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}-$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
2. Vérifier que $w_1 \in E$ et $w_2 \in E$.
3. Montrer que (w_1, w_2) forme une base de E.
4. En déduire $\dim E$.

Exercice 2:(07pts) Soit $f(x) = \tan x$.

1. En utilisant l'expression $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, calculer la dérivée seconde f''.
2. Montrer que $f^{(3)}(x) = \frac{2+4\sin^2 x}{\cos^4 x};\ \forall x \in \mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
3. En appliquant la formule de Taylor, déterminer le développement limité de la fonction tan en 0 à l'ordre 3.
4. Déterminer le développement limité de la fonction tan en $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 3.

Indication: $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \forall x \in \mathbb{R}; \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Exercice 3:(07pts) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Résoudre le système

$$AX = B.$$

Bon courage

Université Abou Bekr Belkaid **A.U 2017-2018**
Faculté des Sciences- T.C SM **06/06/2018**

Corrigé Rattrapage (Maths2)

Exercice 1:(06pts) Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x - 6y + 5z = 0\}$ et $w_1 = (4, 3, 2),\ w_2 = (3, 1, 0)$.

1. E s.e.v de $\mathbb{R}^3 \overset{(\mathbf{0.25})}{\iff} \begin{cases} E \subset \mathbb{R}^3,\ E \neq \emptyset, \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall u, v \in E : \alpha u + \beta v \in E. \end{cases}$

   $E \subset \mathbb{R}^3$ par définition **(0.25)** et $2.0 - 6.0 + 5.0 = 0$ donc $(0, 0, 0) \in E$ ce qui implique que $E \neq \emptyset$**(0.25)**

   Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in E$, les composantes de u, v vérifient

$$2x - 6y + 5z = 0(\mathbf{0.25})$$
$$2x' - 6y' + 5z' = 0.(\mathbf{0.25})$$

   $\alpha u + \beta v \overset{(\mathbf{0.25})}{=} (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')$ où $2(\alpha x + \beta x') - 6(\alpha y + \beta y') + 5(\alpha z + \beta z') = \alpha(2x - 6y + 5z) + \beta(2x' - 6y' + 5z') = 0$ donc $\alpha u + \beta v \in E.$**(0.5)**

   Par conséquent E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

2.
   - On a $2(4) - 6(3) + 5(2) = 0$ donc $w_1 \in E$,**(0.25)**
   - $2(3) - 6(1) + 5(0) = 0$ donc $w_2 \in E$.**(0.25)**

3. (w_1, w_2) forme une base de $E \overset{(\mathbf{0.25})}{\iff} \begin{cases} (w_1, w_2) \text{ libre,} \\ (w_1, w_2) \text{ engendre } E \end{cases}$.

   - (w_1, w_2) libre $\overset{(\mathbf{0.25})}{\iff} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha u + \beta v = (0, 0, 0) \implies \alpha = \beta = 0.$
     Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \alpha u + \beta v = (0, 0, 0) \iff \alpha(4, 3, 2) + \beta(3, 1, 0) = (0, 0, 0)$
     $\overset{(\mathbf{0.5})}{\iff} \begin{cases} 4\alpha + 3\beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \\ 20. \end{cases} \overset{(\mathbf{0.5})}{\implies} \alpha = \beta = 0$. Ainsi (w_1, w_2) est libre.
   - (w_1, w_2) engendre E: Pour cela, on considère $u = (x, y, z) \in E$ montrons qu'ils existent $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que u $= \alpha w_1 + \beta w_2$,**(0.25)** ce qui équivaut à montrer qu'ils existent $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} 4\alpha + 3\beta = x \\ 3\alpha + \beta = y \\ 2\alpha = z \\ 2x - 6y + 5z = 0 \end{cases} \overset{(\mathbf{0.25})}{\iff}$

     $\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}z \\ 2z + 3\beta = x \\ \frac{3}{2}z + \beta = y \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}z(\mathbf{0.25}) \\ \beta = \frac{1}{3}(x - 2z) \\ \beta = y - \frac{3}{2}z.(\mathbf{0.25}) \end{cases}$ Mais $\frac{1}{3}(x - 2z) = y -$

$\frac{3}{2}z \iff 2x-6y+5z=0$**(0.25)**. Par conséquent $\alpha=\frac{1}{2}z,\ \beta=\frac{1}{3}(x-2z)=y-\frac{3}{2}z\in\mathbb{R}$ et (w_1,w_2) engendre E.
Donc (w_1,w_2) est une base de E.

4. $\dim E=2$.**(0.75)**

Exercice 2:(07pts) Soit $f(x)=\tan x$.

1. $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=\cos^{-2}x \implies f''(x)\overset{(\mathbf{01})}{=}-2\cos^{-3}x(-\sin x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x};\ \forall x\in\mathbb{R}-\{\pi/2+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$.

2. $f^{(3)}(x)\overset{(\mathbf{0.5})}{=}\frac{2\cos^4 x+6\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^6 x}\overset{(\mathbf{0.5})}{=}\frac{2(\cos^2 x+\sin^2 x)+4\sin^2 x}{\cos^4 x}\overset{(\mathbf{0.5})}{=}\frac{2+4\sin^2 x}{\cos^4 x};\ \forall x\in\mathbb{R}-\{\pi/2+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$.

3. La formule de Taylor en 0 à l'ordre 3:$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3+\mathcal{O}(x^3);(\mathbf{0.5})$ où $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathcal{O}(x^3)}{x^3}=0.$**(0.25)**
   D'après les deux questions précédentes
   $$f(0)\overset{(\mathbf{0.25})}{=}0;f'(0)\overset{(\mathbf{0.25})}{=}1;f''(0)\overset{(\mathbf{0.25})}{=}0;f^{(3)}(0)\overset{(\mathbf{0.25})}{=}2.$$
   Par conséquent
   $$f(x)=x+\frac{1}{3}x^3+\mathcal{O}(x^3).(\mathbf{0.5})$$

4. La formule de Taylor en $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 3:
   $$f(x)=f(\frac{\pi}{4})+f'(\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{4})+\frac{f''(\frac{\pi}{4})}{2}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{f^{(3)}(\frac{\pi}{4})}{6}(x-\frac{\pi}{4})^3+\mathcal{O}\Big((x-\frac{\pi}{4})^3\Big).(\mathbf{0.5})$$
   où $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\mathcal{O}((x-\frac{\pi}{4})^3)}{(x-\frac{\pi}{4})^3}=0.(\mathbf{0.25})$
   Or
   $$f(\pi/4)\overset{(\mathbf{0.25})}{=}1;f'(\pi/4)\overset{(\mathbf{0.25})}{=}2;f''(\pi/4)\overset{(\mathbf{0.25})}{=}4;f^{(3)}(\pi/4)\overset{(\mathbf{0.25})}{=}16.$$
   Donc
   $$f(x)=1+2(x-\pi/4)+2(x-\pi/4)^2+\frac{8}{3}(x-\pi/4)^3+\mathcal{O}((x-\pi/4)^3).(\mathbf{0.5})$$

Exercice 3:(07pts) Soit

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

1. A est inversible $\iff \det A \neq 0$.**(0.25)**

   Comme $\det A \overset{(\mathbf{0.5})}{=} 1 \neq 0$**(0.25)**, alors$A$ est inversible **(0.5)** donc A^{-1} existe et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ {}^{t}(ComA).(\mathbf{0.25})$$

   $C_{11} = 1; C_{12} = 0; C_{13} = 1,$
   $C_{21} = 1; C_{22} = 1; C_{23} = 1,$ **(0.25** $\times$**6)**
   $C_{31} = 0; C_{32} = 1; C_{33} = 1.$

   Ainsi $ComA \overset{(\mathbf{0.75})}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et ${}^{t}(ComA) \overset{(\mathbf{0.25})}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}.$**(0.75)**

2. $A.X = B \overset{(\mathbf{0.5})}{\iff} X = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(\mathbf{0.25}) \\ 0(\mathbf{0.25}) \\ 2(\mathbf{0.25}) \end{pmatrix}.$