Université Abou Bekr Belkaid | **A.U 2017-2018**
Faculté des Sciences- T.C SM | **13/05/2018**

Epreuve Finale (Maths2)-1^h30^{mn}

(L'usage de la calculatrice est interdit)

Exercice 1:(05pts) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + 2y + 3z = 0\}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}-$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la dimension de F.
3. Soit $G = Vect(\{(0, 1, 1)\})$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2:(08pts) Soit l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y + z, -y + z, x + y). \end{array}$$

1. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$.
2. Déterminer le noyau de f. f est-elle injective?
3. Quel est le rang de f?
4. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_2 = (e'_1, e'_2, e'_3)$ où

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 - e_2 + e_3, \\ e'_2 &= -e_1 + e_3, \\ e'_3 &= -e_1 + e_2. \end{aligned}$$

   (a) Montrer que B_2 est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner la matrice de passage P de B_1 à B_2.
   (c) Vérifier que M est la matrice inverse de P.
   (d) Déterminer la matrice B associée à f dans la nouvelle base B_2.

Exercice 3:(07pts)

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(1 + x^2)y' + 2xy = xe^x.$$

2. Soit $\begin{array}{rcl} f : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \sqrt{9 - x^2 - y^2}. \end{array}$

   - Déterminer le domaine de définition D_f.
     (Représenter D_f dans un repère orthonormé$(O, \vec{i}, \vec{j})$).
   - Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Bon courage

Université Abou Bekr Belkaid
Faculté des Sciences
Tronc Commun SM

A.U 2017-2018
13/05/2018
1^h30^{mn}

Corrigé de l'Epreuve Finale (Maths2)

(L'usage de la calculatrice est interdit)

Exercice 1: Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + 2y + 3z = 0\}$

1. F est un s.e.v du $\mathbb{R}-$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3 \overset{(0.25)}{\iff} \begin{cases} F \subset \mathbb{R}^3,\ F \neq \emptyset \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in F : \alpha u + \beta v \in F \end{cases}$.
   $F \subset \mathbb{R}^3$(par définition), on a $0+2.0+3.0 = 0$ donc $(0, 0, 0) \in F$ et $F \neq \emptyset$**(0.5)**.
   Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in F$, les composantes de u, v vérifient**(0.25)**
   $$x + 2y + 3z = 0$$
   $$x' + 2y' + 3z' = 0.$$
   $\alpha u + \beta v \overset{(0.25)}{=} (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')$ où $\alpha x + \beta x' + 2(\alpha y + \beta y') + 3(\alpha z + \beta z') = \alpha(x + 2y + 3z) + \beta(x' + 2y' + 3z') = 0$**(0.5)**

2. $F = \{(-2y - 3z, y, z);\ y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-2, 1, 0) + z(-3, 0, 1),\ y, z \in \mathbb{R}\}$**(0.5)**,
   F est le s.e.v de $\mathbb{R}^3$ engendré par $u_1 = (-2, 1, 0),\ u_2 = (-3, 0, 1)$.**(0.25)**
   (u_1, u_2) est-elle libre? Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \alpha u_1 + \beta u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \implies \alpha = \beta = 0$?**(0.25)**
   Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \alpha u_1 + \beta u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} -2\alpha - 3\beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \implies \alpha = \beta = 0$,**(0.25)** donc (u_1, u_2) est libre. Par conséquent (u_1, u_2) forme une base de F**(0.25)** et $\dim F = 2$**(0.25)**.

3. Soit G s.e.v de $\mathbb{R}^3$ engendré par $u_3 = (0, 1, 1)$ (non nul) qui est linéairement indépendant donc $\dim G = 1$**(0.25)**. L'égalité $\dim \mathbb{R}^3 = \dim F + \dim G$**(0.25)** est vérifié, il suffit donc de montrer que $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$**(0.25)**
   - $\{(0, 0, 0)\} \subset F \cap G$ est vérifiée puisque F, G sont des s.e.v de $\mathbb{R}^3$**(0.25)**.
   - Soit $u \in F \cap G \iff \begin{cases} u \in F \\ u \in G \end{cases}$
     $\overset{(0.25)}{\iff} \begin{cases} \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R};\ u = \alpha(-2, 1, 0) + \beta(-3, 0, 1) \\ \exists \gamma \in \mathbb{R};\ u = \gamma(0, 1, 1); \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$
     $\iff \begin{cases} -2\alpha - 3\beta = \gamma \\ \alpha = \gamma \\ \beta = \gamma \end{cases} \implies \alpha = \beta = \gamma = 0$. Ainsi $u = (0, 0, 0)$**(0.25)**.

Exercice 2:(08pts) Soit l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+z,-y+z,x+y). \end{array}$$

1. $A = M_f(B_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.**(01)**

2. $\ker f \overset{(\mathbf{0.25})}{=} \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; f(x,y,z)=(0,0,0)\} = \{X\in\mathbb{R}^3; A.X = 0_{\mathbb{R}^3}\}$.

   Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=(0,0,0) \overset{(\mathbf{0.25})}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ -y+z=0 \\ x+y=0. \end{cases}$

   $\overset{(\mathbf{0.25})}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=-y \\ y=z \end{cases}$

   donc $\ker f = \{(-z,z,z);\ z\in\mathbb{R}\} = \{z(-1,1,1);\ z\in\mathbb{R}\}$.**(01)**

   Ainsi $\ker f = Vect(\{(-1,1,1)\}) \neq \{(0,0,0)\}$**(0.5)**, f n'est pas injective.**(0.25)**

3. Le vecteur non nul $(-1,1,1)$ qui engendre $\ker f$ est linéairement indépendant **(0.25)** alors $\dim\ker f = 1$.**(0.25)**

   On a l'égalité **(0.25)**$\dim\mathbb{R}^3 = \dim\ker f + rgf \iff 3 = 1 + rgf$. Ainsi $rgf = rgA = 2$.**(0.5)** (**(0.75)** pour ceux qui calculent le rang de la matrice A.)

4. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_2 = (e_1', e_2', e_3')$ où

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1 - e_2 + e_3, \\ e_2' &= -e_1 + e_3, \\ e_3' &= -e_1 + e_2. \end{aligned}$$

   - B_2 est une base de $\mathbb{R}^3$? Montrons que B_2 est libre.
     On a $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc B_2 est libre **(0.5)** et puisque $\dim\mathbb{R}^3 = 3$**(0.25)** alors B_2 est une base de $\mathbb{R}^3$.
   - $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.**(0.5)**
   - $M.P = P.M = I_3$ donc $M = P^{-1}$.**(01)**
   - $B = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.**(01)**

Exercice 3:(07pts)

1. $(1+x^2)y' + 2xy = xe^x \iff y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{xe^x}{1+x^2}$: Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

   - **ESSM:** **(0.25)**$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = 0 \iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \overset{(\mathbf{0.25})}{=} -\frac{2x}{1+x^2}y \iff \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x \iff y = \frac{k}{1+x^2}$;**(0.5)** où $k \in \mathbb{R}$**(0.25)**. Notons par $y_0 = \frac{k}{1+x^2}$ la solution de l'**ESSM**
   - **EASM:** Cherchons une solution particulière de la forme $y_p = \frac{k(x)}{1+x^2}$.**(0.25)** On calcule y_p' et on substitue dans l'**EASM**: $y_p' = \frac{k'(x)}{1+x^2} - \frac{2xk(x)}{(1+x^2)^2}$**(0.5)**, de l'**EASM**: **(0.25)**$\frac{k'(x)}{1+x^2} - \frac{2xk(x)}{(1+x^2)^2} + \frac{2xk(x)}{(1+x^2)^2} = \frac{xe^x}{1+x^2} \iff k'(x) = xe^x \iff k(x) = \int xe^x\mathrm{d}x$.**(0.25)**

     On calcule la primitive par partie $\begin{cases} u = x(\mathbf{0.25}) \\ \mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x(\mathbf{0.25}) \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x(\mathbf{0.25}) \\ v = e^x.(\mathbf{0.25}) \end{cases}$

     Par conséquent $k(x) \overset{(\mathbf{0.25})}{=} xe^x - e^x + C$; où $C \in \mathbb{R}$. Soit $y_p = \frac{(x-1)e^x}{1+x^2}$**(0.25)** et la solution générale de l'**EASM** est

     $$y_G \overset{(\mathbf{0.25})}{=} y_p + y_0 \overset{(\mathbf{0.5})}{=} \frac{(x-1)e^x + k}{1+x^2};\ k \in \mathbb{R}$$

   - $D_f \overset{(\mathbf{0.25})}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 9 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 9\}$,

     D_f est le disque (cercle intérieur de centre $\overset{(\mathbf{0.25})}{O}$ $(0,0)$ et de rayon $\overset{(\mathbf{0.25})}{R} = 3$, frontière comprise).

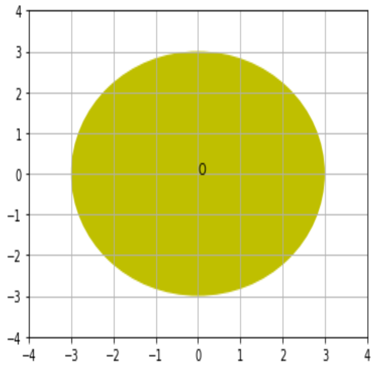

Figure 1: $x^2 + y^2 \leq 9$
(0.5)

   - $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}},\ \forall (x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 < 9\}$,**(0.5)**
     $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}},\ \forall (x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 < 9\}$**(0.5)**