Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

1ère Année Sciences et Technologies

Module : Mathématiques 1

Série de TD 05-Fonctions réelles

Exercice 01 : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1} \quad f_2(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$$
$$f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad f_4(x) = 1$$

Exercice 02 :

a) Montrer que la fonction $f(x) = x^2 + x$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}^+$.
b) Montrer que la fonction $g(x) = 2x - 1 + e^x$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$

Exercice 03 : Les fonctions suivantes sont-elles minorées ? majorées ? dans le cas affirmative déterminer un majorant et/ou un minorant :

$$1) f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -2\sin(x^2 + 2x - 1) \end{array} \qquad 2) g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1 + x^2} \end{array}$$

$$3) h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2}{3 - \cos x} \end{array} \qquad 4) k: \begin{array}{ccc}]0,5] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} - \dfrac{1}{1 + x} \end{array}$$

Exercice04 : Soit $f(x) = x - E(x) = x - [x]$

Tracer le graphe de f, puis montrer qu'elle est périodique de période T=1.

Exercice 05 : Discuter la parité des fonctions $fg \ et \ f \circ g$ selon la parité de f et de g.

Exercice supplémentaire : Soit $f(x) = |x - 3| + |2x + 6|$

Déterminer les restrictions de f aux intervalles : $]-\infty, -3], [-3,3] \ et [3, +\infty[$.En déduire le sens de variation de la fonction .

Exercice 06 : Calculer les limites suivantes, lorsqu'elles existent :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}{x}, \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + 4x - 6}, \quad \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^n - 1}$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{(\sin x)^2}{1+\cos x},\qquad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1},\qquad \lim_{x\to 0} x^2\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2},\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+e^x},\qquad \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}(e^x+\ln x),\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+x^2e^x}$$

Calculer les limites suivantes en effectuant le changement de variable indiqué :

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)\left(on\ pose\ y=\frac{x+1}{x^2+1}\right),\quad \lim_{x\to 0}x^{-\frac{7}{2}}\quad e^{-\frac{1}{x^2}}\left(on\ pose\ y=\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{x^x}\,ln\,x}{x^x-1}(on\ pose\ y=x^x)$$

Exercice 07 : Soient $f\ et\ g$ deux fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, et qui sont continues en un point a. Et soit l'application $\min(f,g)(resp.\max(f,g))$ qui a tout réel x associe le minimum entre $f(x)et\ g(x)$ (resp. max($f(x)$, $g(x)$)). Montrer que les fonctions $\min(f,g)\ et\ \max(f,g)$ sont continues en a.

Indication : $min(x,y)=\frac{1}{2}(x+y-|x-y|)et\max(x,y)=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$

Exercice 08 : Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$1)f(x)=x-[x]\qquad 2)g(x)=x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\ si\ x\neq 0\ et\ g(0)=0$$

$$3)h(x)=\sin x\sin(\frac{1}{x})\qquad 4)k(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}$$

Peut-on prolonger, par continuité, les fonctions $h\ et\ k$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 09 : Soit $f_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie, pour tout entier naturel n, par :

$f_n(x)=\ln(1+x^n)+x-1$

1. Montrer qu'il existe au moins un réel $c_n\in\,]0,1[\ tel\ que\ f_n(c_n)=0$.
2. Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que c_n est unique.

Exercice 10 : Soit a et b deux réels. On définit la fonction $f\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\ si\ 0\le x\le 1\\ ax^2+bx+1\ \ si\ x>1\end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 11 : Etudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ $si\ x \neq 0\ et\ f(0) = 0$ 2) $g(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$ $si\ x \neq 0\ et\ g(0) = 0$

2) $h(x) = \cos\sqrt{|x|}$ 4) $k(x) = \ln(1 + |x|)$

Exercice 12 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes, en précisant le domaine de dérivabilité dans chaque cas :

$$f_1 : x \longmapsto \ln(x^2 - 1)\ ; \qquad f_2 : x \longmapsto \frac{\sin x}{(2 + \cos x)^n}\ ; \qquad f_3 : x \longmapsto \left(tg\ \left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\ ;$$

$$f_4 : x \longmapsto \ln((\sin x)^2)\ ; \quad f_5 : x \longmapsto Arctg\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)\ ; \qquad f_6 : x \longmapsto x^{x+1};$$

Exercice 13 : On considère l'application $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}\right)\ si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et déterminer sa dérivée.
2. Montrer que l'application dérivée $f' :]-1,1[\to \mathbb{R}$ est continue sur $]-1,1[$. Résoudre l'équation $f'(x) = 0\ dans\ ]-1,1[$.
3. Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe. En déduire que f est injective.
4. On désigne par $\tilde{f}$ la bijection $\tilde{f} : [-1,1] \to f([-1,1])$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$, et on désigne par $\tilde{f}^{-1}$ sa bijection réciproque. Justifier l'existence et déterminer $\left(\tilde{f}^{-1}\right)'(0)$.

Exercice 14 : En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x > 0, \frac{1}{x + 1} < \ln(x + 1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

En déduire que $\forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$

Exercice 15 : En utilisant le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2}e^{|x|}$

Exercice 16 :

- Etudier et tracer les graphes des fonctions $x \longmapsto Arcsin(\sin x)\ \ et\ x \longmapsto Arcos(\cos x)$
- Montrer que $\forall x \in [-1,1], Arcsin(x) + Arcos(x) = \frac{\pi}{2}$
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, Arctg(x) + Arctg\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}sgn(x)$

Exercices supplémentaires :

Exercice 01 : On considère la fonction continue sur $[-3,2]$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	-3		-2		1		2
f			5				2
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	-2				0		

Déterminer les images, par f, des intervalles $[-2,1]$, $[-2,2]$, $[-3,1]$. Déterminer le nombre des solutions des équations $f(x) = 0 \; et \; f(x) = 1$.

Exercice 02 : Soit $P(x) = 6x^3 - 8x^2 - 3x + 4$.

Calculer $P(-1), P(0), P(1) et \; P(2)$.

Montrer que ce polynôme possède au moins trois racines .

Exercice 03 : Peut-on appliquer le théorème des accroissements finis sur $[0,2]$ aux fonctions

$$f(x) = \begin{cases} x & si \; 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & si \; 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 - 3) & si \; x \leq 1 \\ -\frac{1}{x} & si \; 1 < x \end{cases}$$

Exercice 04 :

Montrer que toute fonction périodique non constante n'admet pas de limite en $(+\infty)$

Exercice 05 : Soit $f(x) = xlnx - x, tel \; que \; x > 1$. Montrer que $f :]1, +\infty[\to]-1, +\infty[$ est une bijection. Calculer $f^{-1}(0) et \; (f^{-1})'(0)$

Exercice 06 : Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 et vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(3x) = f(x)$$

Exercice 07 :

- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, Arctg(x) > \frac{x}{1+x^2}$
- Résoudre l'équation d'inconnue réelle x : $Arcos(x) = Arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + Arcos(\frac{1}{4})$