Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

1ère Année Sciences et Technologies

Module : Mathématiques 1

Série de TD 04-Applications

Exercice 01 : Les fonctions $f_1(x) = |x|, f_2(x) = \sqrt{x^3 - 1}\ et\ f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sont-elles des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 02 : Soit la fonction

$$f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{x+3}$$

Déterminer son domaine de définition D. En considérant f comme application de D dans $\mathbb{R}$, donner l'image de D par f.

Exercice 03 :

1. Soit
$$f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 + 1$$
Déterminer $f([-1,4]), f(]-\infty,0]), f^{-1}(\{4\}), f^{-1}([-1,4]), f^{-1}(]-\infty,0])$.
2. Quelle est l'image directe, par la fonction sinus, de $\mathbb{R}$? de $[0,2\pi]? de\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$?
3. Déterminer l'image réciproque, par la fonction cosinus, de $[-1,1]? de\ [0,1]$?de $\{0,1\}$?

Exercice 04 : Soient les applications

$$f: \quad \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \qquad g: \quad \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x} \quad et \qquad x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$$

Montrer que $g \circ f = -g\ sur \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 05 : Les applications suivantes sont-elles injectives ?surjectives ? bijectives ?

$$f_1: \quad \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad f_2: \quad \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad f_3 \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto -n \qquad n \mapsto n+1 \qquad x \mapsto x^2$$

$$f_4 \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \qquad f_5 \quad \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad f_6 \quad \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$x \mapsto x^2 \qquad z \mapsto z^2 \qquad n \mapsto \begin{cases} n+2\ si\ n\ pair \\ n+4\ si\ n\ impair \end{cases}$$

Exercice 06 : Soient les applications $f\ et\ g$, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, définies par :

$$f(n) = 2n\ et \quad g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}\ si\ n\ pair \\ 0 \text{ si n } impair \end{cases}$$

Déterminer $g \circ f\ et\ f \circ g$. Les applications $f\ et\ g$ sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 07 : Soit

$$f \quad \mathbb{C} \setminus \{-3\} \to \mathbb{C} \setminus \{i\}$$
$$z \mapsto \frac{iz - i}{z + 3}$$

Montrer que f est une bijection. Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 07 : Soit

$$f \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{2x}{1 + x^2}$$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
3. Montrer que la restriction

$$g \quad [-1,1] \to [-1,1]$$
$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

   est une bijection, et déterminer sa bijection réciproque.

Exercices Supplémentaires :

Exercice 01 : Déterminer une bijection :

- de$\mathbb{N}$ $dans$ $\mathbb{N}^*$
- de $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} dans \left\{\frac{1}{n}, n \geq 2\right\}$
- de $[0,1]$ dans $[0,1]$

Exercice 02 : Soient E et F deux ensembles et $f: E \to F$ une application.

- Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$où $A\ et\ B\ sous\ ensembles\ de\ E$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ? Dans quel cas ?
- Montrer que si $f(A) \cap B = \emptyset$ alors $A \cap f^{-1}(B) = \emptyset$, où$A \in \wp(E) et\ B \in \wp(F)$

Exercice 03 : $f: E \to F, \quad g: F \to G\ et \quad h = g \circ f\ des\ applications$.

- Montrer que si h est injective, alors f l'est aussi. Si de plus f est surjective alors g est injective.
- Montrer que si h est surjective, alors g l'est aussi. Si de plus g est injective alors f est surjective.