Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

Module : Mathématiques 1

1ère Année Sciences et technologies

Série de TD 03-Suites Numériques

Exercice 01 : Calculer la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

$$1)U_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} \qquad 2)U_n = \frac{2n+\sqrt{4n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} \qquad 3)U_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right), n \geq 1$$

$$4)U_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n} \qquad 5)U_n = \sin(\sqrt{n}) - n^3 \qquad 6)U_n = \sqrt[n]{n}, n \geq 1$$

$$7)U_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, x \in \mathbb{R} \qquad 8)U_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n, n \geq 1 \qquad 9)U_n = \sum_{k=0}^{n} x^k, x \in \mathbb{R}$$

Exercice 02 :

1) Vérifier que
   $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
   En déduire la limite de la suite de terme général $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
2) Calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}$$
3) En utilisant le théorème de l'encadrement, déterminer les limites des suites suivantes :
$$1)U_n = \sqrt[n]{2-(\sin(n))^2} \quad 2)U_n = \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2}\right)^n, n \geq 2$$
4) Montrer que $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$. En déduire la limite de la suite de terme général $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Exercice 03 : Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}\ et\ (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites dans l'intervalle$[0,1]$, telles que $\lim_{n\to+\infty} U_n V_n = 1$. Montrer que les deux suites convergent vers la même limite 1.

Exercice 04 : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par :

$$\begin{cases} U_0 \in]0,1] \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2} + \dfrac{(U_n)^2}{4} \end{cases}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq 1$
3. Montrer que la suite est monotone, et en déduire sa nature.
4. Déterminer sa limite.

Exercice 05 : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation récurrente :

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + 1$$

Et son premier terme U_0

1. Supposons que $U_0 \leq 2$:
   1.1. Montrer que la suite est majorée par 2, puis étudier sa monotonie.
   1.2. En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite.
2. Si on considère $U_0 \geq 2$:
   2.1. Montrer que la suite est minorée par 2, puis étudier sa monotonie.
   2.2. En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite.
3. On pose $V_n = U_n - 2$:
   3.1. Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$
   3.2. En déduire une expression de U_n en fonction de n et U_0. Retrouvez les résultats précédents.
   3.3. En déduire la valeur de la limite : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} U_k}{n}$

Exercice 06 : On considère les suites numériques $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\ et\ (V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} et\ V_n = U_n + \frac{1}{n^2}$$

Montrer que les deux suites sont adjacentes. Que peut-on déduire.

Exercice 07 : Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\ et\ (V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$définies par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^2} et\ V_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

Montrer que ces deux suites convergent vers la même limite (que l'on ne cherche pas à calculer).

Exercice supplémentaire 01:

Etudier la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n+U_n}}$

Exercice supplémentaire 02: Trouver la limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1}}}\ (n\ radicaux)$

Exercice supplémentaire 03: Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par

$$\begin{cases} U_0 > 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_0 + U_1 + \cdots + U_n} \end{cases}$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$