Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

Module : Mathématiques 1

1ère Année Sciences et technologies

Série de TD 02-Nombres complexes

Exercice 01 : Soit i le nombre imaginaire vérifiant $i^2 = -1$

1) Calculer i^3 et i^4
2) En déduire les valeurs de i^{2006} et de i^{2009}, puis les entiers naturels n tels que i^n est imaginaire pur.
3) Déterminer les entiers naturels n tels que $(1+i)^n$ soit réel négatif.

Exercice 02 :

1) Mettre sous la forme algébrique les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{3+6i}{3-4i}, \quad z_2 = \frac{1}{(1+2i)(3-i)}, \quad z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$$

$$z_4 = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}, \quad z_5 = (2e^{i\frac{\pi}{3}})(3e^{\frac{5i\pi}{6}})$$

2) Déterminer une forme trigonométrique de :

$$z_1 = -2(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin(\frac{\pi}{5})) \quad z_2 = -1 - i\sqrt{3} \quad z_3 = -\frac{4}{3}i$$

$$z_4 = 1 + i(1+\sqrt{2}) \qquad z_5 = e^{i\theta} + e^{2i\theta} \quad \theta \epsilon]-\pi, \pi[$$

Exercice 03 :

Soit

$$u = 1 + i \; et \quad v = -1 + i\sqrt{3}$$

1. Mettre u et v sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument pour chacune des racines cubiques de u.
3. Déterminer le module et un argument de $\frac{u}{v}$
4. En déduire les valeurs de

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \; et \quad \sin(-\frac{5\pi}{12})$$

Exercice 04 : Soit

$$(1-i)X^3 - (5+i)X^2 + (4+6i)X - 4i = 0$$

1. Montrer que cette équation admet une racine réelle. Résoudre cette équation.

Exercice 05 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 = \left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4$$

Par deux méthodes. En déduire les valeurs $\cos\frac{\pi}{12}, \sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 06 : Linéariser :

$$A(x) = cos^2(x)sin^2(x) \quad B(x) = cos^2(x)sin^3(x)$$
$$C(x) = cos^4(x) \qquad D(x) = cos^3(x)\sin(x)$$

Exercice 07 : On considère le polynôme P défini par

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$$

1) Calculer $P(i\sqrt{3}) et\ P(-i\sqrt{3})$. Déterminer le polynôme Q du second degré à coefficients réels tel que pour tout $z \in \mathbb{C}, on\ a\ P(z) = (z^2+3)Q(z)$
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$
3) Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé les points $A, B, C\ et\ D$ d'affixes respectives : $z_A = i\sqrt{3};\ z_B = -i\sqrt{3};\ z_C = 3 + 2i\sqrt{3}\ et\ z_D = \overline{z_C}$
4) On note E le symétrique de D par rapport à O. Montrer que $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et déterminer la nature du triangle BEC.

Exercice supplémentaire :

1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-2| = |z+i|$
2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-3i| = 2$
3) Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{1-z}{1-iz}$ soit réel.
4) Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{1-z}{1-iz}$ soit imaginaire pur.
5) Soit le nombre $A = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$, montrer que $A^3 = 4 - 3A$. En déduire que A=1.