Université de Tlemcen **au : 2017/2018**
Département de mathématique
1ére année ST

Fiche de TD n°1

Exercice 1 :

a) Trouver tous les nombres x qui vérifient les inégalités suivantes :

1. $(x-1)(2x-3)>0$ 2. $|x+2|(x-3)<0$ 3. $x^2-4x-5<0$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1. $x\left(\sqrt{x}+3\right)=4$ 2. $|x-1|=|2x+3|$

c) Pour $x,y\geq 0$ classer par ordre croissant les expressions :

$\sqrt{x}+\sqrt{y}$, $\sqrt{x+y}$, $2\sqrt{\frac{x+y}{2}}$

d) Démontrer que pour tout x réel on a : $|x-1|\leq x^2-x+1$

Exercice 2 :

Evaluer les formules suivantes en considérant seulement les valeurs des variables données.

$p\wedge(p\vee q)$ où $p=V$, $q\Rightarrow(p\Rightarrow r)$ $où$ $q=F$, $p\vee(q\Rightarrow r)$ où $q=F$

Exercice 3 :

En utilisant les tables de vérité démontrer que :

1-$non(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(p\wedge\bar{q})$ 2 - $non(p\wedge q)\Leftrightarrow\left(non(p)\vee non(q)\right)$

3- $non(p\vee q)\Leftrightarrow\left(non(p)\wedge non(q)\right)$ 4- $(p\Rightarrow q\ etq\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow r)$

Exercice 4 :

Evaluer les formules suivantes en utilisant la table de vérité.

1-$(p\Rightarrow q\ \ )\vee\ \ (q\Rightarrow p)$ 2- $(p\Leftrightarrow q\ \ )\wedge\ \ (q\Leftrightarrow nonp)$

Exercice 5:

Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

-Le carré de tout réel est positif ou nul.

-Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

-Etant donné 3 réels non nuls , deux au moins ont le même signe.

-Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.

Exercice 6 :

Peut-on intervertir les quantificateurs $\forall n\epsilon\mathbb{N}$ et $\exists m\epsilon\mathbb{N}$ dans les propositions suivantes? justifier votre réponse.

a) $\forall n\epsilon\mathbb{N}$, $\exists m\epsilon\mathbb{N}$ tel que $n^2\geq m$ b) $\forall n\epsilon\mathbb{N}$, $\exists m\epsilon\mathbb{N}$ tel que $n\geq m$

Exercice7 : Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies.

1. $\exists x\in\mathbb{R},(x+1=0\ \ et\ \ x+2=0)$
2. $\exists x\in\mathbb{R},(x+1=0)\ et\ \exists x\in\mathbb{R},(\ x+2=0)$
3. $\forall x\epsilon\mathbb{R},(x+1\neq 0\ \ ou\ \ x+2\neq 0)$
4. $\forall y\epsilon\mathbb{R}^*,\exists x\epsilon\mathbb{R}^*,\forall z\epsilon\mathbb{R}^*,z-xy=0$
5. $\forall y\epsilon\mathbb{R}^*,\forall z\epsilon\mathbb{R}^*,\exists x\epsilon\mathbb{R}^*,z-xy=0$

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, écrire la négation des propositions suivantes.

1- $\forall x \epsilon \mathbb{R}, f(x) \neq 0$

2- $\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, f(x) > M$

3-$\forall x \epsilon \mathbb{R}, f(x) > 0 \Rightarrow x < 0$

Exercice 9 :

En utilisant le raisonnement qu'il faut démontrer les énoncés suivants.

a) $\forall n \epsilon \mathbb{N}$ on a : $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) Si $n^2, n \epsilon \mathbb{N}$ est impair alors n est impair.

c) Pour $n \geq 2$, $n \epsilon \mathbb{N}$: Si l'entier $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.

d) $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

LES ENSEMBLES

Exercice 1 : Ecrire en extension les ensembles suivants :

$A = \{nombre\ entier\ compris\ entre\ \sqrt{2}\ et\ 2\pi\}$ $\quad B = \{x \epsilon \mathbb{R}; \exists (n,p) \epsilon \mathbb{N} \times \mathbb{N}, x = \frac{n}{p}\ 1 \leq p \leq 2n \leq 7\}$

Exercice 2 :

1) Est-ce que $C \subset A \cup B$ entraine que $C \subset A$ ou $C \subset B$?

2) Soient A , B, C trois ensembles tels que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.

Exercice 3:

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ tel\ que\ 4x - y = 1\}$ et $B = \{(t + 1, 4t + 3), t \epsilon \mathbb{R}\}$, démontrer que $A = B$.

Exercice 4 : Soient $A, B\ et\ C$ trois sous-ensembles d'un ensemble E, on note X^c le complémentaire de X dans E où X est une partie de E.

Démontrer les égalités suivantes :

a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
b) $(A^c)^c = A$
c) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
d) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Exercice 5 Soit E un ensemble et A,B et C trois éléments de $\wp(E)$.

Démontrer que si :

a) $A \cup B = A \cap B$ alors $A = B$.
b) $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$ alors $B = C$ .une seule des conditions suffit –elle ?

Exercice 6 : Soit E un ensemble et A, B deux sous- ensembles de E, on appelle différence symétrique de A et B le sous ensemble :$A \Delta B = \{x \in A \cup B\ ;\ x \notin A \cap B\}$

1- Interpréter les éléments de $A \Delta B$.

2-Montrer que $A \Delta B = (A \cap \complement_E B) \cup (B \cap \complement_E A)$.

3-Calculer ΔA , $A \Delta \emptyset$, $A \Delta E$, $A \Delta \complement_E A$.

4-Démontrer que $A \Delta B = B$ si et seulement si $A = \emptyset$.

Exercice 7 : Soit E un ensemble et A , B deux parties de E . Résoudre les équations d'inconnue $X \epsilon \wp(E)$.

1- $A \cup X = B$

2- $A \cap X = B$