Université Abou Bekr Belkaid **A.U 2017-2018**
Faculté des Sciences
Tronc Commun SM

TD N°4

Exercice 1:

1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ k & \text{si } x = 2. \end{cases}$

   Déterminer la valeur du réel k pour laquelle f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de $f\colon x \mapsto [x] + \sqrt{x - [x]}$.

Exercice 2: Peut-on prolonger les fonctions suivantes par continuité en x_0? Si oui, donner l'expression du prolongement.

1. $f\colon x \mapsto \frac{\tan x}{x^2}$; $x_0 = 0$. 2. $g\colon x \mapsto x|1 + \frac{1}{x}|$; $x_0 = 0$. 3. $h\colon x \mapsto \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$; $x_0 = 0$.

Exercice 3: Soit $f(x) = x^3 + 3x + 10$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique dans $]-2, 1[$.
2. Donner un encadrement de la solution à 10^{-2} près.
3. En déduire le signe de f sur $[-2, 1]$.

Exercice 4: Montrer que la fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

Exercice 5:

1. Simplifier $\cos(\arcsin x)$ (Préciser le domaine de la variable x).
2. Résoudre l'équation $\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{3}) = \pi/2$.

Exercice 6: a, b deux réels. On considère une fonction f de la variable x, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On éfinit la fonction ϕ de la variable x par:

$$\forall x \in [a, b],\ \phi(x) = f(x) - f(a) - M(x - a),$$

où M est le réel tel que $\phi(b) = \phi(a) = 0$.

1. Donner la valeur de M.
2. Est-ce que ϕ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle entre a et b?

3. En déduire qu'il existe un réel c dans $]a, b[$, tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Exercice 7: En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction arctan, montrer que

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{t}{1+t^2} \leq \arctan t \leq t.$$

Exercice 8: A l'aide de la règle de l'Hospital, déterminer les limites suivantes.
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^2}$, $\quad \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\arctan x}$, $\quad \lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}\right]$, $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin x)}$.

Exercice 9:(supp) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} \text{ si } x \leq 1, \\ \frac{1}{x} \text{ si } 1 < x. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe $c \in]0, 2[$ tel que: $f(2) - f(0) = 2f'(c)$.

2. Déterminer les valeurs possibles de c.