Université Abou Bekr Belkaid **A.U 2017-2018**
Faculté des Sciences
Tronc Commun SM

<u>TD N°3</u>

Exercice 1: Déterminer le domaine de définition des fonctions f définies par:

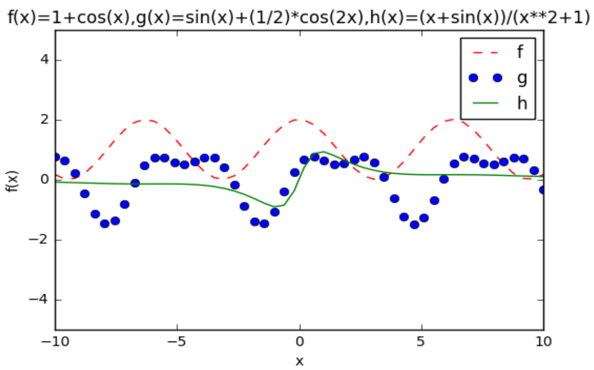
1. $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{4-3x^2}}$,
2. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$,
3. $f(x) = \sqrt[4]{x^2+3x+2}$,
4. $f(x) = \tan(2x)$,
5. $f(x) = \frac{\ln(2+x)}{\sqrt{4-x^2}}$,
6. $f(x) = e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$.
7. $f(x) = ln(e^x+1)$,
8. $f(x) = x^{-1}(\sqrt{|1+x|-1})$,
9. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}$.

Exercice 2:

1. Déterminer le domaine de définition et étudier la parité des fonctions définies par les expressions suivantes.

   (a) $f_2(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$, (b) $f_4(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$.

2. Dire si les fonctions représentées par les graphes suivants sont paires, impaires ou ni l'une ni l'autre.



3. Etudier la périodicité des fonctions définies par:

   (a) $f_3(x) = \cos(\frac{3x}{2})$, $T = \frac{4\pi}{3}$. (b) $f_1(x) = E(x) - x$, $T = 1$,

Exercice 3:

1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

2. On rappelle que: $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \le |x|$.
   Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R},\ |\sin x - \sin y| \le |x - y|$.

Exercice 4: Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x}$,
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+2}{x^2\ln(x)}$,
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}$,
4. **(supp)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x$,
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{1+x^2}+x)$,
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$,
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$,
8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$,
9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$,
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$,
11. **(supp)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^2)^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 1}{(x-1)^2}$,
12. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos(x)}$.

Exercice 5 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1+2\sin x}{1+e^x}.$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$: $-\frac{1}{1+e^x} \leq f(x) \leq \frac{3}{1+e^x}$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 6

1. Montrer que pour tout réel x: $3 \leq 5 + 2\sin(e^x) \leq 7$.
2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \frac{x}{5+3\sin(e^x)}.$$

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

```
"""
Code python pour tracer le graphe d'une fonction (Exercice 2)
"""
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace (-10,10)
y = 1 + np.cos(x)
z = np.sin(x)+(1/2)*np.cos(2*x)
t = (x + np.sin(x))/(x**2+1)
plt.plot(x,y,"r--",label = "f")
plt.plot(x,z,"o",label = "g")
plt.plot(x,t,label = "h")
plt.xlim(-10,10)
plt.ylim(-5,5)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("f(x)")
plt.legend(loc ='best' )
plt.savefig('TD3.png')
plt.title("f(x)=1+cos(x),g(x)=sin(x)+(1/2)*cos(2x),h(x)=(x+sin(x))/(x**2+1)")
plt.show()
```