Université Abou Bekr Belkaid **A.U 2017-2018**
Faculté des Sciences
Tronc Commun SM

TD N°2 Relations et Applications

Exercice 1: Représenter graphiquement le produit cartésien $A \times B$ dans les cas suivants:

1. $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{0, 1\}$.
2. $A = [-4, 3[, B =]-2, 5[$.
3. $A =]2, +\infty[, B =]-3, 4]$.

Exercice 2: On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation $\mathcal{R}$ par:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z};\ x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y.$$

La relation est-elle réflexive, symétrique et transitive?
Exercice 3: On définit dans $\mathbb{R}^2$, la relation $\mathcal{R}$ par:

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, (x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff x < x' \quad ou \quad (x = x' \quad et \quad y \leq y')$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Est-ce une relation d'ordre total?
2. Déterminer l'ensemble des majorants et des minorants du singleton $\{(1, 2)\}$ et les représenter dans $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $A = \{(1, 2), (3, 4)\},\ B = \{(1, 2), (1, 5)\}$. Déterminer $\sup A,\ \inf A,\ \max A,\ \min A,\ \sup B,\ \inf B,\ \max B,\ \min B$ s'ils existent.

Exercice 4:

1. Pour chacune des parties $A_i \subset \mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer si A_i est majorée, minorée, bornée, si elle admet une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum, un minimum.

   $A_1 = \{1, 2, 3, 5, 12\},\ A_2 = \mathbb{N},\ A_3 = \{3-7p;\ p \in \mathbb{N}\},\ A_4 = \{\frac{p}{3^n};\ p, n \in \mathbb{N}\},\ A_5 =]5, 6]$.

2. Calculer $\sup\limits_{x\in[0,\frac{3}{2}]} (x-1)^2, \quad \inf\limits_{x\in[0,\frac{3}{2}]} (x-1)^2, \quad \sup\limits_{x\in[1,2]} \frac{1}{x}. \quad \inf\limits_{x\in]1,2[} \frac{1}{x}, \quad \inf\limits_{x>0} \frac{1}{x}.$

Exercice 5 Soit $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$. Tracer le graphe des relations

de E dans F (Diagramme sagittal) définies ci-dessous et dans chaque cas, dire s'il s'agit d'une fonction ou d'une application.

1. $\forall (x, y) \in E \times F\ x\mathcal{R}_1 y \iff x \geq y$.

2. $\forall (x,y) \in E \times F \ x\mathcal{R}_2 y \iff x - y + 2 = 0.$

3. $\forall (x,y) \in E \times F \ x\mathcal{R}_3 y \iff x = y.$

Exercice 6: Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x^2$. Déterminer l'image directe et réciproque par f des ensembles suivants.

$$A = [0,1], \ B =]-1,4], \ C = [0,+\infty[, \ D =]-\infty,5].$$

Exercice 7: Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \frac{4}{\sqrt{1+x^2}}$

1. Calculer $f(-1), \ f(1), \ f(0)$.

2. L'application f est-elle injective? Surjective? Justifier.

3. Les propositions suivantes sont-elles vraies? Justifier.
   $f^{-1}(4) = 0, \ f^{-1}(\{4\}) = \{0\}$

4. Montrer que la restriction $g\colon [0,+\infty[\to]0,4]; \ g(x) = f(x)$ est une bijection et donner sa fonction réciproque.

Exercice 8: Soit les applications $f\colon \mathbb{R} \to]-1,+1[$ et $g\colon]-1,+1[\to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \ et \ g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ puis en déduire que f admet une application réciproque que l'on déterminera.

Exercice 9 Les applications suivantes sont-elles injectives? Surjectives?

Bijectives?

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; \ f(n) = 2n, \ g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \ g(n) = n+1, \ h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \ h(n) = E\left(\frac{n}{2}\right).$$

Exercice(supp): Dans $\mathbb{N}^*$, on définit une relation $\ll$ en posant pour tout $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$:

$$x \ll y \iff \exists n \in \mathbb{N}^*/ \quad y = x^n.$$

1. Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.

2. On considère que l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est ordonné par la relation $\ll$.

   Soit $A = \{2,4,16\}$. Déterminer le plus grand élément et le plus petit élément de A.