Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département des Mathématiques

Jeudi 21 Juin 2018

Module : Math 1- Tronc commun ST

Durée : 1 h-30mns

Examen de rattrapage

« L'usage de la calculatrice est strictement interdit »

Exercice 01 : (05 pts) Soit le nombre complexe $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $X^3 = 1$, donner les solutions sous formes algébriques et trigonométriques.
2. Montrer que $\overline{z} = z^2 \; et \; z^{-1} = z^2$
3. Montrer que $1 + z + z^2 = 0$
4. En déduire la valeur de $\frac{1}{1+z}$
5. Calculer la valeur du nombre complexe $\left(\frac{1}{1+z}\right)^n \; pour \; n \in \mathbb{N}$.

Exercice 02 : (05 pts) On considère la fonction f définie sur l'ensemble des réels par :

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) si \; x \neq 0 \\ \\ 0 \; si \; x = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2) Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$, puis calculer sa dérivée f' pour tout $x \neq 0$.
3) Etudier la dérivabilité de f en 0.
4) Calculer $\lim_{x \to 0} f'(x)$
5) En déduire que f est de classe $C^1(\mathbb{R})$.

Exercice 03 : (05 pts) Soit $a > 0$, on définit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(U_n + \dfrac{a}{U_n}\right) \end{cases}$$

1. Montrer que $U_n > 0 \; et \; que \; U_{n+1}^2 - a = \frac{(U_n^2 - a)^2}{4U_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$
2. Vérifier que $U_n \geq \sqrt{a} \; pour \; tout \; n \geq 1$,et que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, puis calculer sa limite.

Exercice 04 : (05 pts) Soit l'application $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

1) f est-elle injective ? surjective ? justifier.
2) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
3) On considère l'application :

$$g: \quad \begin{aligned} [-1,1] &\to [-1,1] \\ x &\longmapsto g(x) = f(x) \end{aligned}$$

Montrer que g est bijective.

Corrigé

Exercice 01 : (05 pts)

1. $X^3 = 1 \Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = 1e^{i2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$.**(0.25 pt)**

   Ce qui signifie : $X_k = e^{\frac{2ik\pi}{3}}, avec\ k \in \{0,1,2\}$(les racines de l'unité)**(0.5 pt)**

   D'où :

$$\begin{cases} X_0 = 1\ (\mathbf{0.25\ pt}) \\ X_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\ \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = z\ (\mathbf{0.25\ pt}) \times \mathbf{2} \\ X_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\ \sin\frac{4\pi}{3} == -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{z}(\mathbf{0.25\ pt}) \times \mathbf{2} \end{cases}$$

2. $\overline{z} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 = z^2$**(0.25 pt)**

   On a z est solution de l'équation $X^3 = 1, donc\ z\ z^2 = 1\ ou\ encore\ z^2 = z^{-1}\ (\mathbf{0.25\ pt})$.
3. D'après ce qui précède, on a $1 + z + z^2 = 1 + z + \overline{z} = 1 + 2Re(z) = 1 - 1 = 0\ (\mathbf{0.5\ pt})$
4. On a $1 + z + z^2 = 0 \Leftrightarrow 1 + z = -z^2$

   Comme $z^2 = z^{-1}\ alors\ \frac{1}{1+z} = -z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(0.5 pt)**
5. $\left(\frac{1}{1+z}\right)^n = (-1)^n e^{n\frac{2i\pi}{3}}, tel\ que\ n\ un\ entier\ naturel.$

   $Si\ n\ est\ un\ multiple\ de\ 3, alors \left(\frac{1}{1+z}\right)^n = (-1)^n\ \ (\mathbf{0.5\ pt})$

   $Si\ n \equiv 1[3]\ alors\ \left(\frac{1}{1+z}\right)^n = (-1)^n z\ (\mathbf{0.5\ pt})$

   $Si\ n \equiv 2[3]\ alors\ \left(\frac{1}{1+z}\right)^n = (-1)^n \overline{z}\ (\mathbf{0.5\ pt})$

Exercice 02 : (05 pts)

1) Etude de la continuité de f :

- Si $x \neq 0$, on a $f(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ Qui est la composée de la fonction continue : $\begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto \frac{e^x-1}{x} \end{cases}$ et de la fonction continue $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln x \end{cases}$, ce qui signifie que f est continue sur $\mathbb{R}^*$ **(0.75 pt)**
- Si $x = 0$:

  $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{x+\frac{x^2}{2}}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0$

  D'où $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ et f est continue en 0 **(0.75 pt)**.

2) Sur $\mathbb{R}^*$, f est la composée de la fonction dérivable $(x \longmapsto \frac{e^x-1}{x})$ et de la fonction logarithme qui est dérivable aussi **(0.5 pt)**, donc f est dérivable et sa dérivée :

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x + 1}{x(e^x - 1)}\ pour\ tout\ x \neq 0\ (\mathbf{0.5\ pt})$$

3) Dérivabilité en 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc la fonction est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$ **(01 pt)**

4) $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(x-1)e^x+1}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-1)\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)+1}{x(x+\frac{x^2}{2})} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(1+x)}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$ $(\mathbf{0.5\ pt})$

5) D'après la 2ème et la 3ème question, la fonction est dérivable sur l'ensemble des réels **(0.25 pt)**, en plus :
   - Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction $x \longmapsto f'(x) = \frac{(x-1)e^x+1}{x(e^x-1)}$ est continue (car c'est la composée de fonctions continues) **(0.25 pt)**.
   - En 0, on a $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$ donc la fonction dérivée est continue en 0 **(0.25 pt)**

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle est de classe $C^1(\mathbb{R})$.**(0.25 pt)**

Exercice 03 : (05 pts) Soit $a > 0$, on définit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right) \end{cases}$$

1. a) Montrons par récurrence que $U_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$:
   On a $U_0 = 1 > 0$ et la propriété est vérifiée pour n=0. Supposons que $U_n > 0$ donc forcément $\frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right) > 0\ ce\ qui\ signifie\ U_{n+1} > 0.$
   D'où $U_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ **(01 pt)**

   b) Pour tout entier n :

$$U_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right)^2 - a = \frac{1}{4U_n^2}((U_n^2+a)^2 - 4aU_n^2) = \frac{(U_n^2-a)^2}{4U_n^2}\ (\mathbf{0.75\ pt})$$

2. D'après la question précédente, on a
   $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n^2 - a = \frac{(U_{n-1}^2-a)^2}{4U_{n-1}^2} \geq 0$ càd $(U_n+\sqrt{a})(U_n-\sqrt{a}) \geq 0$
   Comme $(U_n+\sqrt{a}) > 0\ (puisque\ \ U_n > 0\ et\ \sqrt{a} > 0) on\ aura\ (U_n - \sqrt{a}) \geq 0$
   D'où $U_n \geq \sqrt{a}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ce qui signifie que la suite est minorée par la valeur $\sqrt{a}$ **(0.75 pt)**.
3. Pour tout entier n :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2U_n}(a - U_n^2)\ (\mathbf{0.25\ pt})$$

$$On\ a \begin{cases} U_n > 0\ (\mathbf{0.25\ pt}) \\ a - U_n^2 \leq 0\ (car\ U_n \geq \sqrt{a})(\mathbf{0.25\ pt}) \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

   $Donc$: $U_{n+1} - U_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}\ ou\ encore\ (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante **(0.25 pt)**.
4. La suite est décroissante et minorée donc convergente **(0.75 pt)**, noterons $l = \lim_{n\to+\infty} U_n$.

$$\forall n \geq 1, on\ a\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right)\ ce\ qui\ implique\ \lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right)$$

   D'où: $l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right) \Rightarrow l = \pm\sqrt{a}$ **(0.5 pt)**

Par unicité de la limite et comme les termes de la suite sont strictement positifs, alors $l = \sqrt{a}$ **(0.25 pt)**

Exercice 04 : (05 pts)

1) L'application n'est pas injective car $f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right)$.**(01 pt)**

   L'application n'est pas surjective car les valeurs appartenant à $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ n'ont pas d'antécédents.**(01 pt)**

2) La fonction f est définie, continue et dérivable sur l'ensemble des réels :

   $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2\dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

   D'où $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$ **(01 pt)**

3) L'application g ainsi définie est continue et strictement croissante **(01 pt)**, en plus $g([-1,1]) = [-1,1]$ $(\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$ donc g est bijective **(0.5 pt)**.