**Université Abou Bekr Belkaid**
**Faculté des Sciences**
**Tronc Commun SM**

**A.U 2017-2018**
**21/06/2018**
**$1^h 30^{mn}$**

# Rattrapage (Maths1)

**(L'usage de la calculatrice est interdit)**

**Exercice 1:(6pts)** Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; 5 + 8 + 11 + \cdots + (5 + 3n) = 5(n+1) + \frac{3n(n+1)}{2}.$$

**Exercice 2:(7pts)** Soit $f$ une fonction définie de $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \frac{2+x}{3-x}$$

1. Soit $y$ un réel fixé. Résoudre l'équation $y = f(x)$. $f$ est-elle surjective?
2. Montrer que $f$ est injective.
3. Montrer que la restriction $g : \mathbb{R}\backslash\{3\} \to \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ est une bijection et déterminer son application réciproque notée $g^{-1}$.

**Exercice 3:(7pts)** Soit

$$h(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$$

.

1. Déterminer le domaine de définition de $h$.
2. Calculer $\lim_{x \to 2} h(x)$. Peut-t-on prolonger $h$ par continuité en 2?
3. Calculer l'intégrale indéfinie suivante

$$\int \frac{x^2 + 4x + 7}{x^2 + 4x + 5} \mathrm{d}x$$

**Bon courage**

**Université Abou Bekr Belkaid** **A.U 2017-2018**
**Faculté des Sciences** **21/06/2018**
**Tronc Commun SM** $\mathbf{1}^{h}30^{mn}$

# Rattrapage (Maths1)

**(L'usage de la calculatrice est interdit)**

**Exercice 1:** Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; 5+8+11+\cdots+(5+3n) = 5(n+1) + \frac{3n(n+1)}{2}.$$

- Pour $n=0$ : $5=5$; l'égalité est vraie pour $n=0$.**(01)**
- Supposons que l'égalité est vraie pour $n$ fixé et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$**(0.5)**. c-à-d montrons que $\sum_{k=0}^{n+1}(5+3k) = 5(n+2) + \frac{3(n+1)(n+2)}{2}$**(0.5)**
  On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}(5+3k) &= \sum_{k=0}^{n}(5+3k) + (5+3n+3)(\mathbf{0.5+0.5}) \\
&= 5(n+1) + \frac{3n(n+1)}{2} + (8+3n)(\mathbf{01}) \\
&= 5(n+2) + 3(n+1) + \frac{3n(n+1)}{2} \\
&= 5(n+2) + \frac{6(n+1)+3n(n+1)}{2} \\
&= 5(n+2) + \frac{(n+1)(6+3n)}{2} \\
&= 5(n+2) + \frac{3(n+1)(n+2)}{2}(\mathbf{01})
\end{aligned}$$

**Conclusion:** $\forall n \in \mathbb{N}: \; 5+8+11+\cdots+(5+3n) = 5(n+1) + \frac{3n(n+1)}{2}$.**(01)**

**Exercice 2:(5pts)** Soit $f$ une fonction définie de $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \frac{2+x}{3-x}$$

1. Soit $y$ un réel fixé. $y = f(x) \iff y = \frac{2+x}{3-x} \overset{(\mathbf{0.5})}{\iff} 3y-2 = x(y+1)$
   - Si $y=-1$ l'équation n'admet pas de solutions.**(0.75)**
   - Si $y \neq -1; x = \frac{3y-2}{1+y}$.**(01)** f n'est pas surjective**(0.5)** car $y=-1$ n'admet pas d'antécédants.**(0.5)**
2. $f$ est injective $\iff \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{3\}; f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.**(0.25)**

$$\begin{aligned}
\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{3\} : f(x_1) = f(x_2) &\iff \frac{2+x_1}{3-x_1} = \frac{2+x_2}{3-x_2} \\
&\overset{(\mathbf{0.5})}{\iff} (2+x_1)(3-x_2) = (3-x_1)(2+x_2) \\
&\iff 5(x_1-x_2) = 0 \overset{(\mathbf{0.5})}{\implies} x_1 = x_2.
\end{aligned}$$

3. $g : \mathbb{R}\backslash\{3\} \to \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ est une bijection**(0.5)** car

$$\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}, \exists! x \in \mathbb{R}\backslash\{3\} \text{ où } x = \frac{3y-2}{1+y}(\mathbf{01})$$

et $g^{-1}$ est définie de $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ dans $\mathbb{R}\backslash\{3\}$**(0.5)** par: $g^{-1}(x) = \frac{3x-2}{1+x}$**(0.5)**

**Exercice 3:(7pts)** Soit

$$h(x) = \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$$

.

1. $D_h = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - x - 2 \neq 0\}$.**(0.25)** On résoud l'équation $x^2 - x - 2 = 0$ on obtient $x_1 = -1, x_2 = 2$. Donc $D_h = \mathbb{R}\backslash\{-1, 2\}$.**(01)**
2. $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} \overset{(\mathbf{01})}{=} 4/3 \overset{(\mathbf{0.5})}{\neq} \infty$. Par conséquent on peut prolonger $h$ par continuité en 2.**(01)**
3. 

$$\int \frac{x^2+4x+7}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{01})}{=} \int \frac{x^2+4x+5}{x^2+4x+5} + \frac{2}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{0.5})}{=}$$
$$\int 1 + \frac{2}{(x+2)^2+1}\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{0.5})+(\mathbf{01})+(\mathbf{0.25})}{=} x + 2\arctan(x+2) + C.$$

**Bon courage**