Université de Tlemcen Mardi 16 Janvier 2018

Faculté des Sciences **Module :** Math 1- Tronc commun Sciences et Technologies

Département des Mathématiques **Durée :** 1 h-30mns

Examen final

« L'usage de la calculatrice est strictement interdit »

Exercice 01 : (04 points) Soit le nombre complexe $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$, on pose $\omega = z^2$.

1. Ecrire ω sous sa forme algébrique, puis sous sa forme trigonométrique.
2. Déterminer la forme trigonométrique de z.
3. En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 02 : (06 points) On considère l'application $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

1) Montrer que f est paire.
2) L'application f est-elle injective ? Justifier.
3) Résoudre l'équation $f(x) = 2$. L'application est-elle surjective ?
4) Montrer que $f$est décroissante sur$[0,+\infty[$, puis trouver $f([0,+\infty[)$.
5) Soit l'application

$$g: \quad \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to &]0,1] \\ x & \mapsto & g(x) = f(x) \end{array}$$

Montrer que g est bijective.

Exercice 03 : (04 points) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|\sin x|}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

1. Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$.
2. La fonction f est-elle continue en 0 ? est-elle dérivable en0 ? Justifier.

Exercice 04 : (06 points) Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$deux suites numériques définies par

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \quad et \quad V_n = U_n - \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1)
   a) Calculer U_1, U_2, V_1 et V_2.
   b) Pour $n \geq 1$, calculer $(U_{n+1} - U_n)$ et $(V_{n+1} - V_n)$
2) Énoncer le théorème des accroissements finis, puis montrer que

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}, \forall n \geq 1.$$

3) En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, et que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
4) Que peut-on dire des deux suites ? Déduire alors qu'elles convergent vers la même limite.

Module : Math 1- Tronc commun Sciences et Technologies

Corrigé de l'épreuve finale

Exercice 01 : $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1) $\omega = z^2 = 2+\sqrt{3} - (2-\sqrt{3}) + 2i\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

   La forme algébrique

$$\omega = 2\sqrt{3} + 2i \quad (\ \mathbf{01}\ \boldsymbol{pt})$$

$$|\omega| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = 4\ (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$$

Si on pose $\theta = \arg(\omega)$, $\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $et \sin\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ce qui entraine que $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ **(0.5pt)**

D'où la forme trigonométrique

$$\omega = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad (\ \mathbf{0.25}\ \boldsymbol{pt})$$

2) On déduit de la première question que $|z|^2 = 4\ donc\ |z| = 2$, **(0.25 pt)**
   et que les argument possibles de z sont $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \{0,1\}$. **(0.25 pt)**

Donc $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ $ou\ z = 2\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$, comme $Re(z) et\ Im(z)$ sont positives, alors

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \quad (\ \mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$$

3) Par identification :

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

   D'où :

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} \end{cases} \quad (\ \mathbf{0.75}\ \boldsymbol{pt})$$

Exercice 02 : On considère l'application $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{1}{1+(-x)^2} = f(x)$, donc f est une application paire. **(01 pt)**
2. L'application n'est pas injective car elle est paire. **(01 pt)**
3. L'équation $f(x) = 2$ est équivalente à l'équation $2x^2 = -1$, qui n'a aucune solution réelle**(0.5 pt).** L'application f n'est pas surjective, puisque l'élément 2 n'a pas d'antécédent réel **(0.5 pt)**.
4. L'application f est <u>continue</u> et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ $(\boldsymbol{0.5\ pt})$, ce qui prouve que f est <u>décroissante sur</u> $\mathbb{R}^+$**(0.5 pt)**.
   Par conséquence : $f([0,+\infty[) =]\lim_{x\to+\infty} f(x)\,,\ f(0)] =]0,1]$ **(01 pt)**
5. L'application g est définie sur $[0,+\infty[$ et à valeurs dans $f([0,+\infty[)$, donc elle est <u>surjective</u> **(0.5 pt)**. En plus g est <u>strictement décroissante</u> sur $[0,+\infty[$ donc <u>injective</u> **(0.5pt)**. Ce qui prouve que g est une bijection.

Exercice 03 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|\sin x|}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

1. On a

$$\lim_{\substack{> \\ x\to0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to0}} \frac{\sin x}{x} = 1\ (\ \boldsymbol{01\ pt})$$
$$\lim_{\substack{< \\ x\to0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to0}} (-\frac{\sin x}{x}) = -1(\boldsymbol{01\ pt})$$

Donc la limite n'existe pas

2. On a $\lim_{x\to0} f(x)$ n'existe pas, ce qui signifie que la fonction n'est pas continue en 0 **(01 pt)**.
   F n'est pas dérivable en 0, puisqu'elle n'est pas continue en ce point, car toute fonction dérivable est continue ce qui est équivalent à dire que toute fonction discontinue en un point ne peut être dérivable en ce point **(01 pt)**.

Exercice 04 : Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\ et\ (V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$deux suites numériques définies par

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \quad et \quad V_n = U_n - \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1)

a) $U_1 = 1,\ \ U_2 = 1 + \frac{1}{2} - \ln 2 = \frac{3}{2} - \ln 2$ **(0.5 pt)**
$V_1 = U_1 - 1 = 0\ ,\ \ V_2 = U_2 - \frac{1}{2} = 1 - \ln 2.$ **(0.5 pt)**

b) $(U_{n+1} - U_n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n), \forall n \in \mathbb{N}^*\ (\ \boldsymbol{0.5\ pt})$$

$(V_{n+1} - V_n) = U_{n+1} - \frac{1}{n+1} - U_n + \frac{1}{n}$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln n), \forall n \in \mathbb{N}^* (\mathbf{0.5\ \ pt})$$

2) <u>Théorème des accroissements finis</u> : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ **(01 pt)**

On applique le théorème des accroissements finis pour la fonction logarithme sur l'intervalle $[n, n+1]\ avec\ n \geq 1$. Puisque la fonction logarithme est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$, donc en particulier elle est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[\ pour\ tout\ n \geq 1$, ce qui entraine que :

$$\exists c \in]n, n+1[\ tel\ que \ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{c}\,(n+1-n) = \frac{1}{c}\ (\mathbf{0.5pt})$$

$Comme\ c \in]n, n+1[$ alors $\frac{1}{c} \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$. D'où :

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}\ pour\ tout\ n \geq 1 (\mathbf{0.5\ pt}).$$

3) D'après la double inégalité démontrée dans la deuxième question, on a :

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n\ \ ou\ encore\ \ \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) < 0, \forall n \geq 1$$

Donc

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) < 0, \forall n \geq 1.$$

Ce qui prouve que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante **(0.5 pt)**.

D'après la même inégalité, on a

$$\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}\ \ c-\text{à}-d\ \ \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n} < 0\ pour\ tout\ n \geq 1$$

Donc

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Ce qui prouve que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante **(0.5 pt)**.

4) On a $V_n - U_n = -\frac{1}{n} < 0\ pour\ tout\ n \geq 1$ ce qui implique $V_n < U_n$, $\forall n \geq 1$

En plus $\lim_{n\to+\infty} V_n - U_n = \lim_{n\to+\infty}(-\frac{1}{n}) = 0$ **(0.25 pt)**

Et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante (**0.25 pt)**. D'où les deux suites sont adjacentes et donc convergent vers la même limite **(0.5 pt)**.