Université Abou Bekr Belkaid
Faculté des Sciences
Tronc Commun SM

A.U 2017-2018
16/01/2018
$\mathbf{1}^{h}30^{mn}$

Epreuve Finale (Maths1)

(L'usage de la calculatrice est interdit)

Exercice 1:(cours)(10pts)

1. Soit P l'application définie sur $\mathbb{R}$ par
$$P(x) = 1 - 2x^2.$$
   - Déterminer l'image directe de $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$ par l'application P.
   - Déterminer l'image réciproque de $[-1, 1]$ par l'application P.

2. On rappelle que $x \mapsto \cos x$ est une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.
Soit
$$f(x) = \arccos(1 - 2x^2).$$
   - Déterminer le domaine de définition de f.
   - Calculer la dérivée de f et préciser le domaine où f est dérivable.

3. Montrer que $\forall x \in [-1, 1];\ \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$.

4. Soit
$$g(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6}.$$
   - Décomposer $g(x)$ en éléments simples.
   - Calculer la primitive de la fonction g.

Exercice 2:(5pts) Soit
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.
3. Peut-on prolonger f par continuité en 1?

Exercice 3:(5pts) Soit k, k' deux entiers naturels non nuls.

1. Ecrire la contraposée de
$$k.k' = 1 \implies k = k' = 1. \tag{1}$$
2. En utilisant la contraposée, montrer que la proposition (1) est vraie.
3. Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N};\ \sum\limits_{k=0}^{n} (2k + 1) = (n + 1)^2$.

Bon courage

Université Abou Bekr Belkaid **A.U 2017-2018**
Faculté des Sciences **/01/2018**
Tronc Commun SM $\mathbf{1}^{h}30^{mn}$

Epreuve Finale (Maths1)

Exercice 1:(cours)(10pts)

1. Soit P l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P(x) = 1 - 2x^2.$$

- Image directe de $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$ par l'application P.
  $P\Big([-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]\Big) = \Big\{P(x);\ x \in [-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]\Big\}(\mathbf{0.25})$
  $x \in [-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2] \iff -\sqrt{2}/2 \leq x \leq \sqrt{2}/2 \overset{(\mathbf{0.25})}{\iff} 0 \leq x^2 \leq 2/4 \iff$
  $0 \leq 2x^2 \leq 1 \iff -1 \leq -2x^2 \leq 0 \overset{(\mathbf{0.25})}{\iff} 0 \leq 1 - 2x^2 \leq 1.$
  Par conséquent $P([-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]) = [0, 1](\mathbf{0.25})$.
- Image réciproque de $[-1, 1]$ par l'application P.
  $P^{-1}\Big([-1, 1]\Big) = \{x \in \mathbb{R}; P(x) \in [-1, 1]\}(\mathbf{0.25})$
  $P(x) \in [-1, 1] \iff -1 \leq P(x) \leq 1 \iff -1 \leq 1 - 2x^2 \leq 1 \iff$
  $-2 \leq -2x^2 \leq 0 \iff 0 \leq 2x^2 \leq 2 \overset{(\mathbf{0.25})}{\iff} 0 \leq x^2 \leq 1 \overset{(\mathbf{0.25})}{\iff} -1 \leq x \leq 1.$
  Par conséquent $P^{-1}([-1, 1]) = [-1, 1].(\mathbf{0.25})$

2. On rappelle que $x \mapsto \cos x$ est une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.
   Soit

$$f(x) = \arccos(1 - 2x^2).$$

- Domaine de définition de f.
  $D_f = \{x \in \mathbb{R}, 1 - 2x^2 \in [-1, 1]\}(\mathbf{0.25})$. Comme $P^{-1}\Big([-1, 1]\Big) = [-1, 1]$ alors $D_f = [-1, 1](\mathbf{0.75})$.
- Dérivée de f: $f'(x) \overset{(\mathbf{0.25})}{=} (1-2x^2)'.\arccos'(1-2x^2) \overset{(\mathbf{0.25})+(\mathbf{0.5})}{=} (-4x).\frac{-1}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}} \overset{(\mathbf{0.25})}{=}$
  $\frac{4x}{\sqrt{4x^2-4x^4}} \overset{(\mathbf{0.25})}{=} \frac{2x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$.
  f' est définie sur $]-1, 0[\cup]0, 1[(\mathbf{0.75})$. On remarque aussi que $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = -2$. donc f est dérivable sur $]-1, 0[\cup]0, 1[$

3. Montrons que $\forall x \in [-1, 1];\ \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$:
   Soit $y \overset{(\mathbf{0.25})}{=} \arccos(-x);\ \forall x \in [-1, 1]$ donc $\cos y \overset{(\mathbf{0.25})}{=} -x \iff x = -\cos y \overset{(\mathbf{0.25})}{=} \cos(\pi - y) \iff \arccos x \overset{(\mathbf{0.25})}{=} \arccos\Big(\cos(\pi - y)\Big) \overset{(\mathbf{0.5})}{=} \pi - y.$
   Par conséquent $\arccos x + \arccos(-x) = \pi;\ \forall x \in [-1, 1].(\mathbf{0.25})$

4. Soit

$$g(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6}.$$

- Décomposition de $g(x)$ en éléments simples: $g(x) \overset{(\mathbf{0.5})}{=} \frac{2x-1}{(x-2)(x-3)}$ on peut donc écrire
  $g(x) \overset{(\mathbf{0.5})}{=} \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$ où $A = -3(\mathbf{0.25}), B = 5(\mathbf{0.25})$
  Ainsi
  $$g(x) = \frac{-3}{x-2} + \frac{5}{x-3}(\mathbf{0.25})$$

- Primitive de $g(x)$:
  $$\int g(x)dx = \overset{(\mathbf{0.5})}{-} 3\ln|x-2| + \overset{(\mathbf{0.5})}{5} \ln|x-3| + \overset{(\mathbf{0.25})}{C} \ ; \ C \in \mathbb{R}$$
  .

Exercice 2:(5pts) Soit
$$f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$$

1. Domaine de définition de f: $D_f \overset{(\mathbf{0.5})}{=} \{x \in \mathbb{R}/ \ |x-1| \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}(\mathbf{0.5})$

2. Calcul de $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.
   On a $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}; |x-1| = \begin{cases} x-1 \ ; \ x > 1, (\mathbf{0.5}) \\ -x+1 \ ; \ x < 1.(\mathbf{0.5}) \end{cases}$
   Donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} x+1 = 2(\mathbf{0.5})$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{-x+1} = \lim\limits_{x\to 1^-} -(x+1) = -2(\mathbf{0.5})$

3. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)(\mathbf{01})$ donc f n'admet pas un prolongement par continuité en 1**(01)**.

Exercice 3:(5pts) Soit k, k' deux entiers naturels non nuls.

1. La contraposée de
   $$k.k' = 1 \implies k = k' = 1. \tag{1}$$
   est
   $$k \neq 1 \vee k' \neq 1 \implies k.k' \neq 1.(\mathbf{01})$$

2. Montrons que la proposition (1) est vraie en utilisant la contraposée.
   $\Big((1) \iff k \neq 1 \vee k' \neq 1 \implies k.k' \neq 1\Big)$
   Supposons **(0.5)**$k \neq 1$ ou $k' \neq 1$, alors soit $\overset{(\mathbf{0.25})}{(} \ k \geq 2$ et $k' \geq 1)$ ou $\overset{(\mathbf{0.25})}{(} \ k \geq 1$ et $k' \geq 2)$.
   - Si $k \geq 2$ et $k' \geq 1$ alors $k.k' \neq 1.(\mathbf{0.5})$
   - Si $k \geq 1$ et $k' \geq 2$ alors $k.k' \neq 1.$**(0.5)**
     Ainsi la proposition (1) est vraie.

3. Montrons

$$\forall n \in \mathbb{N};\ \sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2.$$

- Pour $n=0$, $\sum_{k=0}^{0}(2k+1) = 1 = (0+1)^2 = 1.$**(0.25)**
- Supposons pour n fixé que $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$**(0.25)** et montrons que

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = (n+2)^2.(\mathbf{0.25})$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) &\overset{(\mathbf{0.5})}{=} \sum_{k=0}^{n}(2k+1) + \big(2(n+1)+1\big)\\ &\overset{(\mathbf{0.25})}{=} (n+1)^2 + 2n + 3\\ &\overset{(\mathbf{0.25})}{=} n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2.\end{aligned}$$

Conclusion: Ainsi $\forall n \in \mathbb{N};\ \sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2.$**(0.25)**