Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr Belkaid – Tlemcen **1ère année M.I.**

TD11 – Espaces Vectoriels

Exercice 1 : Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.
La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre?

Exercice 2 : On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants (e_1, e_2, e_3, e_4). Les familles suivantes sont-elles libres ?
1. $(e_1, 2e_2, e_3)$.
2. (e_1, e_3).
3. $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$.

Exercice 3 : Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.
L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Exercice 4 : Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)$, $v_3 = (3, 1, 4, 2)$, $v_4 = (10, 4, 13, 7)$ et $v_5 = (1, 7, 8, 14)$.
Chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, en extraire au moins une famille libre engendrant le même sous-espace.

Exercice 5 : Soient $a = (2,3, -1)$, $b = (1, -1, -2)$, $c = (3,7,0)$ et $d = (5,0, -7)$.
Soient $E = Vect\,(a, b)$ et $F = Vect\,(c, d)$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $E = F$.

Exercice 6 : On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ et $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$.
$Vect\,(v_1, v_2)$ et $Vect\,(v_3)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 7 : Soient $u_1 = (1, -1, 2)$, $u_2 = (1, 1, -1)$ et $u_3 = (-1, -5, -7)$
Soit $E = Vect\,(u_1, u_2, u_3)$
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$
1. Donner une base de E.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner une base de F.
4. Donner une base de $E \cap F$.

Exercice 8 : Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$
Soient $a = (1, -2, 3)$ et $b = (2, 1, -1)$ deux vecteurs. On pose $F = Vect(a, b)$
1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $E \cap F$.
3. A-t-on $E \oplus F$?