Université AboubekrBelkaid Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

2017/2018
MI
Durée 1h30

Rattrapage en statistiques
07 / 06 /2018

Exercice N°1 (10 pts)

Dans une usine X, on note pour chaque employé la distance entre son domicile et son travail, les résultats de cette expérience sont les suivants :
6.2 (km) - 10.8 - 36.8 - 44.2 - 22 - 22.5 - 21.6 - 18.9 - 17.6 - 24.8 - 16.8 - 20.3 - 23.2 - 15.6 - 32.6 - 33.8 - 26.1 - 28.3 - 30.6 - 34(km).

1. Déterminer la population et la variable étudiée
2. Si vous utilisiez la méthode de Yule ou Sturge (en choisir une méthode en la nommant) combien de classes, aurait votre tableau statistique ?
3. Donner le tableau statistique (ni, fi, nic, fic) en prenant les classes suivantes :

Ci	[5, 15[	[15, 25[	[25, 35[	[35,45[

4. Calculer la distance moyenne.
5. Si on vous dit que la majorité (le plus grand nombre) des employés habitent entre 15 km et 25km ([15, 25[) que représente cette classe (terme statistique).
6. Tracer sur votre feuille les deux graphes associés à ce type de variable.
7. Calculer la médiane.
8. Calculer l'écart-type.
9. Une personne a été oubliée dans cette étude, elle habite à 26km. A quelle nouvelle distance moyenne se trouvent les employés de cette usine ?

Exercice N°2(4pts)

I] Démontrez que pour tout $n \geq 1$ *on a*:

- $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$

II] Un digicode (composé de 9 chiffres (de 1 à 9) et de 4 lettres A B C D) se trouve à l'entrée d'un immeuble. Il faut composer un code formé de 3 chiffres nécessairement distincts et de 2 lettres.

1. Déterminer le nombre de code possible
2. Parmi ces codes ; dénombrer ceux qui répondent à ce critère :
   - A « Les 3 chiffres sont pairs », en déduire P(A).
3. Au dispositif d'ouverture de la porte est associé une alarme. Le signal d'alarme se déclenche dès qu'un des 3 chiffres ne figure à sa place sur la liste des chiffres codés (si le code est 123BD et que l'on tape 321BD l'alarme se déclenche)
   - Déterminer le nombre de code qui ne déclenche pas d'alarme.

Exercice N°3 (6pts)

Soit X la variable aléatoire réelle (v a r) continue et soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} cx & si \quad c \leq x \leq 2c \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1) Déterminer « c » afin que la fonction f soit une fonction de densité.
2) Calculer l'espérance mathématique E(X) (traitez juste le cas positif).
3) Déterminer la fonction de répartition F (traitez juste le cas positif).

Bon courage

Exercice N°2(4pts)

I] Démontrez que pour tout $n \geq 1$ $on\ a$:

- $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$

II] Un digicode (composé de 9 chiffres (de 1 à 9) et de 4 lettres A B C D) se trouve à l'entrée d'un immeuble. Il faut composer un code formé de 3 chiffres nécessairement distincts et de 2 lettres.

1. Déterminer le nombre de code possible
2. Parmi ces codes ; dénombrer ceux qui répondent à ce critère :
   - A « Les 3 chiffres sont pairs », en déduire P(A).
3. Au dispositif d'ouverture de la porte est associé une alarme. Le signal d'alarme se déclenche dès qu'un des 3 chiffres ne figure à sa place sur la liste des chiffres codés (si le code est 123BD et que l'on tape 321BD l'alarme se déclenche)
   - Déterminer le nombre de code qui ne déclenche pas d'alarme.

Exercice N°3 (6pts)

Soit X la variable aléatoire réelle (v a r) continue et soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} cx & si \quad c \leq x \leq 2c \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1) Déterminer « c » afin que la fonction f soit une fonction de densité.
2) Calculer l'espérance mathématique E(X) (traitez juste le cas positif).
3) Déterminer la fonction de répartition F (traitez juste le cas positif).

Bon courage

2017/2018

Rattrapage Statistique (MI)

Solution proposée

Exo1 :

1) la population Ω ⟶ les employés (0,25)
   la variable ⟶ la distance (0,25)

2) Soit k le nbre de classe, $k \in \mathbb{N}^*$

Sturge (0,25) | Yule

$k = 1 + 3{,}3 \log_{10} N$ (0,25) | $k = 2{,}5 \sqrt[4]{N}$ — N : effectif Total

$= 5{,}29$ | $= 5{,}28$

$\Rightarrow k = 6$ car $k \in \mathbb{N}$ (0,25) $\Rightarrow k = 6$ car $k \in \mathbb{N}$

3) Tableau :

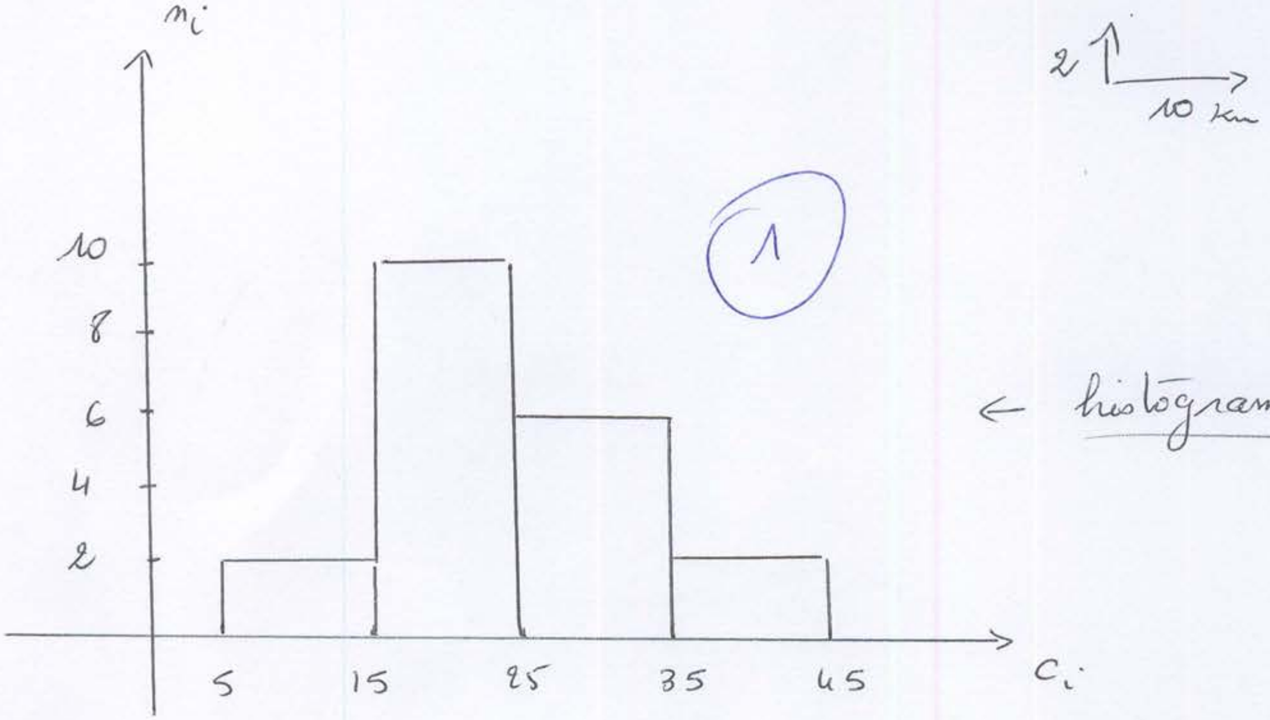
C_i	[5,15[	[15,25[	[25,35[	[35,45[	
n_i	2	10	6	2	0,25
f_i	2/20 = 0,1	0,5	0,3	0,1	0,25
n_{ic}	2	12	18	20	0,25
f_{ic}	0,1	0,6	0,9	1	0,25
x_i	10	20	30	40	0,25
$n_i \times x_i$	20	200	180	80	
x_i^2	100	400	900	1600	
$n_i \times x_i^2$	200	4000	5400	3200	

4) la moyenne $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{4} n_i x_i = \sum f_i x_i$ (0,25)

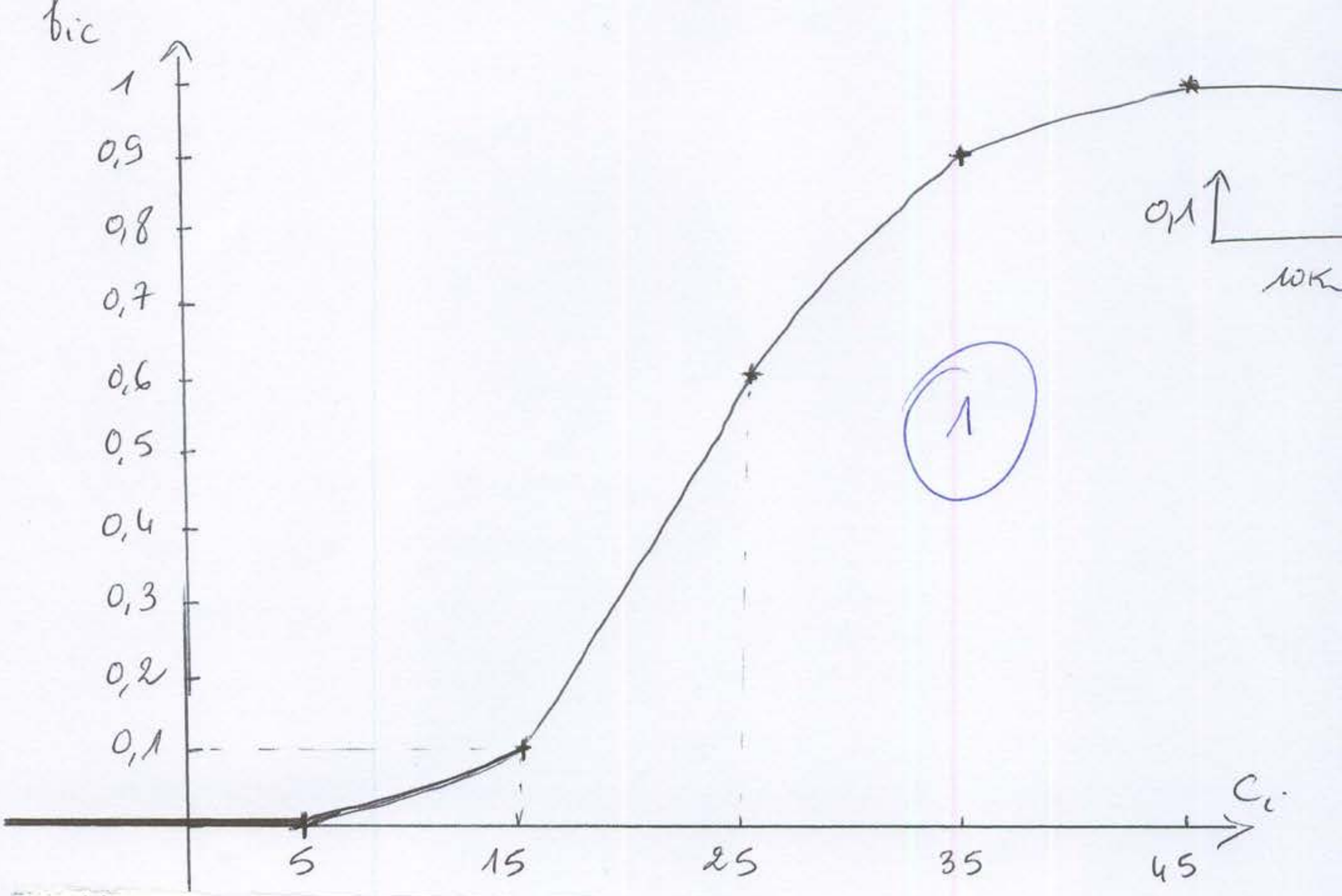
$\bar{X} = \frac{1}{20}(20 + 200 + 180 + 80) = 24$ Km. (0,25)

5) [15, 25 [⟶ est dite classe modale (0,5)

6)



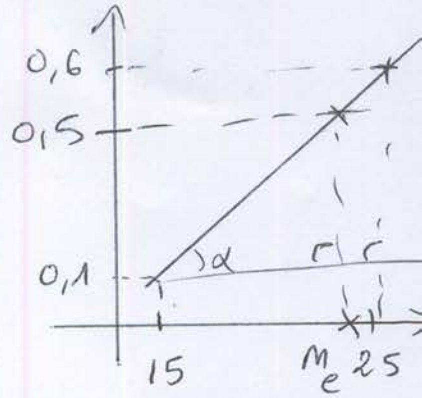
← histogramme



courbe cumulative

ou courbe des fréquences cumulées

7) <u>la mediane</u>



$$tg\,\alpha = \frac{0{,}6-0{,}1}{25-15} = \frac{0{,}5}{10} = 0{,}05$$ 0,5

$$tg\,\alpha = \frac{0{,}5-0{,}1}{M_e-15} = \frac{0{,}4}{M_e-15}$$ 0,5

$$tg\,\alpha = tg\,\alpha \iff \frac{0{,}4}{M_e-15} = 0{,}05 \Rightarrow \boxed{M_e = 23\,km}$$

0,5

8) <u>l'ecart type</u> σ_x

$$\overline{X^2} = \frac{1}{N}\sum_i n_i \times x_i^2 = \sum f_i \cdot x_i^2$$ 0,25

$$= \frac{1}{20}(200 + \cdots + 3200) = 640$$ 0,25

$$V(x) = \overline{X^2} - (\overline{X})^2 = 640 - (24)^2 = 64$$ 0,25 + 0,25

$$\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{V(x)} = 8\ km.$$ 0,25 + 0,25

9) $$\overline{Z} = \frac{N_1\overline{X} + N_2\overline{Y}}{N_1+N_2}$$ 1

$$= \frac{20(24) + 1(26)}{21} = 24{,}09\ km.$$

0,5

Ex02

I) On sait que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ 0,25

On pose $a = -1$, $b = 1$ 0,25 + 0,25

$(a+b)^n = (-1+1)^n = 0^n = 0$

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k (1)^{n-k}$

$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k$ 0,25

$= C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n$

Conclusion

$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$ C.Q.F.D

II]

1) nbre de code possible

$A_9^3 \times 4^2 = 9 \times 8 \times 7 \times 16 = 8064$ codes (0,5+0,5)

A_9^3 4^2

2) les 3 chiffres sont pairs

$A_4^3 \times 4^2 = 4 \times 3 \times 2 \times 16 = 384 \Rightarrow P(A) = \frac{384}{8064} = 0,047$

0,25 0,25 0,5

[{2, 4, 6, 8} ensemble des chiffres paires]

3) les codes qui ne déclenchent pas l'alarme

(les chiffres doivent être fixer, les lettres peuvent permuter)

$\underbrace{1 \times 1 \times 1}_{} \times \underbrace{4 \times 4}_{} = 16$ codes.

0,5 0,5

4

Exo3 :

$$f(x) = \begin{cases} cx & \text{si } c \leq x \leq 2c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Trouvez "c" pour que f soit une densité

Si $c \geq 0$

On aura $c \leq x \leq 2c \Rightarrow x \geq 0$

dc $cx \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x$) 0,5

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \overset{0,25}{=} \int_{-\infty}^{c} \underbrace{f(x)}_{0}\,dx + \int_{c}^{2c} f(x)\,dx + \int_{2c}^{+\infty} \underbrace{f(x)}_{0}\,dx$$

$$= \int_{c}^{2c} cx\,dx$$

$$= \left[\frac{c}{2}x^2\right]_c^{2c} \overset{0,25}{=} 2c^3 - \frac{c^3}{2} = \frac{3}{2}c^3$$

Or $I = 1 \overset{0,25}{\Rightarrow} \frac{3}{2}c^3 = 1$

$\Rightarrow c^3 = 2/3 \Rightarrow \boxed{c = \sqrt[3]{2/3}}$ acceptée

0,25

Si $c < 0$

On aura $2c \leq x \leq c$ donc $x < 0$

et $cx \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x$) 0,5

On pose $c = -c'$ avec $c' > 0$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \overset{0,25}{=} \int_{-\infty}^{2c} \underbrace{f(x)}_{0}\,dx + \int_{2c}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} \underbrace{f(x)}_{0}\,dx$$

5

$$I = \int_{2c}^{c} f(x) = \int_{-2c'}^{c'} -c'x \, dx = \left[-\frac{c'}{2} x^2 \right]_{-2c'}^{-c'}$$

$$= -c' \left[\frac{c'^2}{2} - 4\frac{c'^2}{2} \right] \overset{0,25}{=} + \frac{3}{2} c'^3$$

$$I = 1 \overset{0,25}{\Rightarrow} c'^3 = 2/3 \Rightarrow c' = \sqrt[3]{2/3}$$

$$\Rightarrow \boxed{c \overset{0,25}{=} -\sqrt[3]{2/3}} \quad \text{accepté}$$

2) $E(x)$ <u>cas positif</u> $\xrightarrow{ie} c > 0$

$$E(x) \overset{0,5}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, dx$$

$$\overset{0,25}{=} \int_{-\infty}^{c} x \cancel{f(x)} \, dx + \int_{c}^{2c} x f(x) \, dx + \int_{2c}^{+\infty} x \cancel{f(x)} \, dx$$

$$= \int_{c}^{2c} c x^2 \, dx \overset{0,25}{=} \left[\frac{c}{3} x^3 \right]_{c}^{2c} = 8/3 \, c^4 - \frac{c^4}{3}$$

$$= 7/3 \, c^4 = 7/3 \left(\frac{2}{3} \right)^{4/3}$$

0,5

3) <u>Fonction de répartition</u> F

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \, dt$$

<u>Si $x < c$</u>

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \, dt = 0$$

0,25

6

Si $c \leq x \leq 2c$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{c} \underbrace{f(t)}_{0}\,dt + \int_{c}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{c}^{x} c\,t\,dt = \left[\frac{c}{2}t^2\right]_c^x$$

$$= \frac{c}{2}x^2 - \frac{1}{2}c^3$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} x^2 - \frac{1}{3}$$

0,78

Si $x > 2c$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{c} \underbrace{f(t)}_{0}\,dt + \int_{c}^{2c} f(t)\,dt + \int_{2c}^{x} \underbrace{f(t)}_{0}\,dt$$

$= 1$

0,75

d: $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x < c = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{2}cx^2 - \frac{1}{3} & \text{Si } c \leq x \leq 2c \\ 1 & \text{Si } x \geq 2c. \end{cases}$$

Si $c \leq x \leq 2c$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{c} \underbrace{f(t)}_{=0}\,dt + \int_{c}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{c}^{x} c\,t\,dt = \left[\frac{c}{2} t^2\right]_c^x$$

$$= \frac{c}{2} x^2 - \frac{1}{2} c^3$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} x^2 - \frac{1}{3}$$

0,78

Si $x > 2c$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{c} \underbrace{f(t)}_{=0}\,dt + \int_{c}^{2c} f(t)\,dt + \int_{2c}^{x} \underbrace{f(t)}_{=0}\,dt$$

$$= 1$$

0,75

d :

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x < c = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{2} c x^2 - \frac{1}{3} & \text{Si } c \leq x \leq 2c \\ 1 & \text{Si } x \geq 2c. \end{cases}}$$