Nom : --

Prénom : --

Date de Naissance : ------------------------------------

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr BELKAID-Tlemcen

06/06/2018
Rattrapage Algèbre 2
Durée : 1h-30'

<u>EXERCICE 1 :</u> (6pts) On définit la loi $*$ sur $\mathbb{R}$ en posant : $x*y = x + y - xy$

1- $(\mathbb{R},*)$ est-il un groupe ?

2- Montrer que $(\mathbb{R}-\{1\}, *)$ est un groupe abélien isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$.

3- Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $x^{(n)} = x * x * \ldots * x$ (n fois).

1- La loi * est interne : pour tout x, y de IR x*y est dans IR 0.5

La loi * est visiblement commutative : pour tout x, y de IR x*y=y*x 0.5

La loi * est associative : Soient x, y et z des réels.

(x*y) * z = (x + y -xy)*z =x+y+z-xy-xz-yz+xyz et

x* (y*z) = x* (y+z-yz)=x+y+z-xy-xz-yz+xyz.

Donc pour tous les x, y et z de IR (x*y)*z=x*(y*z) 1

Elément neutre e : Soit x un réel , x*e=x équivaut x+e-ex=x, c'est-à-dire e(1-x)=0. Donc on a x=0 ou x=1. Mais pour x=1 on a 1*0=1+0-0=1. Donc e=0 est neutre pour *. 1

Elément symétrique : Soit x un réel et sym(x) son symétrique pour *. On a x*sym(x)=0 équivaut sym(x)=x/(x-1) si x est différent de 1. Donc x=1 n'a pas de symétrique pour *. 0.5

<u>En conclusion :</u> (IR, *) n'est pas un groupe.

2- De la question 1- on déduit que (IR-{1}, *) est un groupe abélien.

Il faut bien remarquer que sym(x)=x/(x-1) est bien dans IR-{1}. 1

Soit f une application de $(\mathbb{R}-\{1\}, *)$ vers $(\mathbb{R}^*, \times)$. On remarque que x*y=x(1-x)+y équivaut à 1-x*y=(1-x) (1-y). 0.5 De ceci on construit le morphisme f par : pour tout x dans IR-{1}, f(x) = 1-x. Ceci nous donne bien f(x*y)=1-(x*y)=(1-x) (1-y)=f(x)f(y). 0.5

f est bijectif : en effet pour tout y réel non nul, il existe un unique x dans IR-{1} tel que y=1-x, soit x=1-y. 0.5

3- f(x*x*...*x)=f(x)f(x)...f(x) (n fois) puisque f est un morphisme.

Donc 1-(x*x*...*x)=$(1-x)^n$, d'où x*x*...*x = 1 - $(1-x)^n$. 0.5

****
****
****
****
****
****
****

EXERCICE 2 : (4pts) Soit P un polynôme unitaire du troisième degré dans $\mathbb{R}[x]$ qui vérifie : P(2)=P(0)=P'(0)=0. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(x-2)^{3n} - x^{2n} + 1$ par $P(x)$. (P' étant le polynôme dérivé de P).

X=0 est solution double et x=2 est solution simple. Donc P(x)=$x^2(x-2)$. 1

Soit L(x)= $(x-2)^{3n} - x^{2n} + 1$ ce qui implique que

L'(x)= $3n(x-2)^{3n-1} - 2nx^{2n-1}$.

On a : L(x)=P(x).Q(x) + R(x) avec d°R<3. 2(0.5)

Soit R(x)=$ax^2 + bx + c$ d'où R'(x)=2ax+b. 2(0.5)

L(0)=R(0) équivaut $(-2)^{3n} + 1$ = c 0.5

L'(0)=R'(0) équivaut $3n(-2)^{3n-1} + 1$ =b 0.5

L(2)=R(2) équivaut $-2^{2n} + 1$ = 4a +2b +c,

d'où a= $-4^{n-1} + (3n-1)(-2)^{3n-2}$. 0.5

EXERCICE 3 : (4pts) Peut-on déterminer α et β dans $\mathbb{R}$ tels que le vecteur u = (- 2, α, β, 3) appartienne au sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par a= (1, - 1, 1, 2) et b= (- 1, 2, 3, 1) ?

Même question pour : u = (α, 1, β, 1), a= (1, 2, 3, 4) et b=(1, - 2, 3, - 4).

Soit E un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ engendré par a et b et soit u un élément de E, alors il existe x, y deux réels tel que u=xa +yb. 1

1- u = (- 2, α, β, 3) , a= (1, - 1, 1, 2) et b= (- 1, 2, 3, 1).

On a 1 $\begin{cases} x - y = -2 \ (1) \\ -x + 2y = \alpha \ (2) \\ x + 3y = \beta \ (3) \\ 2x + y = 3 \ (4) \end{cases}$

De (1) et (4) on déduit : x=1/3 et y=7/3 0.5

De (2) et (3) on déduit : α= 13/3 et β= 22/3. 0.5

2- $u=(\alpha, 1, \beta, 1)$, $a=(1, 2, 3, 4)$ et $b=(1, -2, 3, -4)$.

On a 0.5 $\begin{cases} x+y=\alpha \quad (1) \\ 2x-2y=1 \quad (2) \\ 3x+3y=\beta \quad (3) \\ 4x-4y=1 \quad (4) \end{cases}$

De (2) et (4) on déduit que le système est impossible. 0.5

Donc α et β n'existent pas. 0.5

<u>EXERCICE 4 :</u> (6pts) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout vecteur $u=(x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ par: $f(u) = (-2x + y + z + a\,;\ \ x - 2y + z - a)$ où a est un réel.

1- Déterminer a pour que f soit une application linéaire.
2- Déterminer le noyau de f puis en donner la dimension.
3- Déterminer le sous espace vectoriel image par f de $\mathbb{R}^3$ puis en donner une base.

1- Si f est une application linéaire alors $f(0)=0$, d'où $a=0$.
On vérifie aisément que si $a=0$ alors f est bien une application linéaire. 1
2- $\mathrm{Ker}(f)=\{(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(x,y,z)=(0,0)\}$. 1
Donc on a $-2x+y+z=0$ et $x-2y+z=0$. 0.5
Posons $x=t$, on obtient $y+z=2t$ et $-2y+z=-t$. 0.5
Soit $y=t$ et $z=t$.
Donc $\mathrm{Ker}(f)=\{t(1,1,1)$ avec t réel$\}$. 0.5
$\{(1,1,1)\}$ est une famille libre et génératrice donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$,
d'où $\dim \mathrm{Ker}(f)=1$. 0.5
3- D'après le théorème du rang :
$\dim \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}(f) = 3-1=2$. 0.5
Comme $\mathrm{Im}(f)$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$ et comme $\dim \mathrm{Im}(f)=2$, alors $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^2$. 1
Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est donc : $\{(1,0),\ (0,1)\}$. 0.5

-- FIN --