Université Abou bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

2017/2018
MI
Durée 1h30

Examen de statistiques
14/05/2018

Exercice N°1 (6pts)

Une urne contient des boules indiscernables au toucher : une verte marquée 1, une verte marquée 2, deux noires marquées 1 et quatre noires marquées 2.
On extrait simultanément et au hasard trois boules de l'urne.
On considère les évènements suivants :
E : « obtenir exactement une boule verte ».
F : « obtenir exactement une boule marquée 1 ».
G : « obtenir la réalisation de E et la non réalisation F »

1. Calculer la probabilité des évènements : E, F, E∩F puis en déduire P(G) et P(E∪F).
2. Les évènements E et F sont-ils indépendants ? incompatibles ? (justifiez vos réponses)

Exercice N°2 (4pts)

Trois opérateurs de téléphonie mobile (A, B, C) se partagent le marché Algérien à part égale.
Une personne prise au hasard téléphone.
La probabilité que la communication n'aboutisse pas sachant que la personne utilise l'opérateur A est de 0.03.
La probabilité que la communication n'aboutisse pas sachant que la personne utilise l'opérateur B est de 0.06
La probabilité que la communication n'aboutisse pas sachant que la personne utilise l'opérateur C est de 0.09.

- Sachant que la communication de la personne a abouti, quelle est la probabilité que la personne utilise l'opérateur A.

Soient les évènements :
A « la personne utilise l'opérateur A ».
B « la personne utilise l'opérateur B ».
C « la personne utilise l'opérateur C ».
D « la communication de la personne a abouti».

Exercice N°3 (6pts)

Soit X la variable aléatoire réelle (v a r) continue et soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x} & si \quad e^{-1} \leq x \leq e \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1) Déterminer « α » afin que la fonction f soit une fonction de densité.
2) Calculer l'espérance mathématique E(X)
3) Déterminer la fonction de répartition F, en déduire P(X<1).

Exercice N°4 (questions de cours) (4pts)

1) X suit une loi de poisson de paramètre λ , λ>0.
   Soit n un entier naturel $n \in \mathbb{N}$, calculez $P\left(X = \frac{n}{n+1}\right)$.

2) On pose $Y = \frac{X-3}{3}$, calculez E(Y) et V(Y) sachant que X suit une loi exponentielle de paramètre λ= (1/3).

3) Un questionnaire à choix multiples (QCM) comporte 10 questions. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées dont une seule correcte les autres sont fausses.
   Un élève répond au hasard à chaque question du QCM.
   On note X la v.a.r qui représente le nombre de réponses correctes qu'il a données. Préciser la loi de probabilité suivie par X (Donner la/les valeur(s) du/des paramètres).

Bon Courage
Bon Ramadan

2017/2018

Solution Proposée

MI

Statistiques et Probabilité

Exo1

1/ $P(E) \overset{0,25}{=} \dfrac{C_2^1\, C_6^2}{C_8^3}$ 0,25 $= \dfrac{\frac{2!}{1!1!}\ \frac{6!}{4!2!}}{\frac{8!}{3!5!}} = \dfrac{\cancel{2}\times\frac{5\times 6}{1\times\cancel{2}}}{\frac{\cancel{6}\times 7\times 8}{1\times\cancel{2}\times\cancel{3}}} = \dfrac{15}{28}$ 0,25

$P(F) \overset{0,25}{=} \dfrac{C_3^1\, C_5^2}{C_8^3} = \dfrac{15}{28}$ 0,25   0,25 choix des combinaise

$P(E\cap F) \overset{0,5}{=} \dfrac{C_1^1\, C_4^2}{C_8^3} + \dfrac{C_1^1 C_2^1\, C_4^1}{C_8^3} = \dfrac{1}{4}$ 0,5

On obtient :

$P(E\cup F) \overset{0,5}{=} P(E) + P(F) - P(E\cap F) = \dfrac{23}{28}$ 0,25

$P(G) \overset{0,5}{=} P(E\cap \overline{F}) = P(E-F) = P(E) - P(E\cap F) = \dfrac{8}{28} = \dfrac{2}{7}$ 0,25

2/ $P(E\cap F) \neq 0$ 0,5 $\Rightarrow$ E et F ne sont pas compatibles 0,25

$P(E\cap F) \neq P(E).P(F)$ 0,5 $\Rightarrow$ E et F ne sont pas independants 0,25

Exo2

$$\left.\begin{array}{l} P(A) + P(B) + P(C) = 1 \\ P(A) = P(B) = P(C) = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = 1/3$$

0,25 0,5 0,25

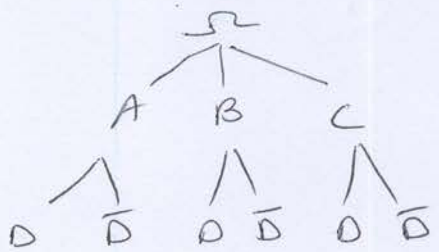
de plus

0,25 $P(\overline{D}/A) = 0{,}03 \Rightarrow P(D/A) = 1 - P(\overline{D}/A) = 0{,}97$

0,25 $P(\overline{D}/B) = 0{,}06 \Rightarrow P(D/B) = 1 - P(\overline{D}/B) = 0{,}94$

0,25 $P(\overline{D}/C) = 0{,}09 \Rightarrow P(D/C) = 1 - P(\overline{D}/C) = 0{,}91$

0,25



P_2^b $P(A/D) = ??$ Bayes

$$P(A/D) = \frac{P(D/A) \cdot P(A)}{P(D)} \quad 0,25$$

$$P(D) = P(D/A) \cdot P(A) + P(D/B) \cdot P(B) + P(D/C) P(C) \quad 0,5$$

$$= \frac{1}{3}(0,97 + 0,94 + 0,91) = 0,94 \quad 0,5 \quad (\text{ou } P(\bar{D}$$

$$P(A/D) = \frac{0,97 \cdot 1/3}{0,94} = 0,344 \quad 0,5$$

Exo3 :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha/x & \text{si } x \in [e^{-1}; e] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1/ f densité $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 & (*) \end{cases}$ 0,25

$f(x) \geq 0 \Rightarrow \alpha/x \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq 0$ 0,25 car $x > 0$ $(x \in [e^{-1}; e$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \overset{0,5}{=} \int_{-\infty}^{e^{-1}} \cancel{f(x)}\,dx + \int_{e^{-1}}^{e} f(x)\,dx + \int_{e}^{+\infty} \cancel{f(x)}\,dx$$

$$= \int_{e^{-1}}^{e} \frac{\alpha}{x}\,dx \overset{0,5}{=} [\alpha \ln x]_{e^{-1}}^{e} = \alpha \ln e - \alpha \ln e$$

$$= \alpha(1+1) = 2\alpha$$

$(*) \Leftrightarrow 2\alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1/2}$ 0,5

2/ calculer $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ 0,25

$$E(x) \overset{0,25}{=} \int_{-\infty}^{e^{-1}} x f(x)\,dx + \int_{e^{-1}}^{e} x f(x)\,dx + \int_{e}^{+\infty} \cancel{x f(x)}\,dx$$

$$\overset{0,5}{=} \int_{e^{-1}}^{e} \alpha\,dx = \alpha[x]_{e^{-1}}^{e} = \frac{e - e^{-1}}{2} \quad 0,5$$

3) Fonction de Repartition

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Si $x < e^{-1}$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$

Si $x \in [e^{-1}, e]$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{e^{-1}} \underbrace{\cancel{f(t)}}_{0}\,dt + \int_{e^{-1}}^{x} f(t)\,dt$

$$F(x) = \int_{e^{-1}}^{x} \frac{\alpha}{t}\,dt = \left[\alpha \ln t\right]_{e^{-1}}^{x}$$
$$= \alpha\left[\ln x - \ln e^{-1}\right] = \alpha\left[\ln x + 1\right]$$
$$= \frac{1+\ln x}{2}$$

Si $x > e$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{e^{-1}} \underbrace{\cancel{f(t)}}_{0}\,dt + \int_{e^{-1}}^{e} f(t)\,dt + \int_{e}^{x} \underbrace{\cancel{f(t)}}_{0}\,dt$

$$= \int_{e^{-1}}^{e} f(t)\,dt = 1$$

cl : $$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x < e^{-1} \quad 0{,}25 \\ \dfrac{1+\ln x}{2} & \text{Si } e^{-1} \leq x \leq e \quad 0{,}75 \\ 1 & \text{Si } x > e \quad 0{,}5 \end{cases}}$$

$$P(X < 1) = P(X \in]-\infty, 1[)$$
0,5
$$= F_X(1) - F_X(-\infty) = F_X(1) - \lim_{x \to -\infty} F(x)$$
$$= \frac{1+\ln 1}{2} - 0 = 1/2 \quad 0{,}5$$

[ou bien $P(X<1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx$]

Exo4

1/ $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ $\quad P\left(X = \frac{n}{n+1}\right) = 0$ 0,5

car $\frac{n}{n+1} \notin \mathbb{N} = D_X$ (support de la v.a) 0,5

2/ On Pose $Y = \frac{X-3}{3}$

$X \hookrightarrow \mathcal{E}(1/3)$ $\quad \lambda = 1/3 \Rightarrow \begin{cases} E(X) = \frac{1}{\lambda} = 3 & 0{,}25 \\ V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 9 & 0{,}25 \end{cases}$

$E(Y) = \frac{1}{3}\left(E(X) - 3\right) = \frac{1}{3}(3-3) = 0$ 0,5

$V(Y) = \frac{1}{9} V(X) = 1$ 0,5

3/ Experience à 2 résultats possibles (Réponses correctes ou Réponses fausses)

qu'on repeté 10 fois

$\Rightarrow X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, P)$ 0,25

$n = 10$ 0,5

P : Proba du succès (des bonnes réponses) $\left(\frac{1}{4}\right)$

$(P = 1/4)$ 0,75

donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{4}\right)$